

Fiche 54 : applications linéaires.

Exercice 1

Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des applications linéaires sur $\mathbb{R}[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, donner l'image et le noyau des applications qui sont linéaires :

$$P \mapsto P(0), \quad P \mapsto P(1) - 1, \quad P \mapsto P'(3), \quad P \mapsto (P'(2))^2, \quad P \mapsto \int_0^1 P(t)dt.$$

Exercice 2

Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ 2x + y - 2z \\ x + 3y - z \end{pmatrix}$$

- Justifier que f est linéaire.
- (a) Déterminer une base et la dimension du noyau de f , noté $\ker f$.
(b) L'application f est-elle injective ?
- (a) Donner le rang de f et une base de $\operatorname{Im} f$.
(b) L'application f est-elle surjective ?

Exercice 3

- Vérifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ puis } f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Calculer } f \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ en général.}$$

- Déterminer $\operatorname{Ker} f$. En fournir une base. Donner un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans $\mathbb{R}^3$ et vérifier qu'il est isomorphe à $\operatorname{Im} f$.