Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 2023-2024.

DS 7, 02-02, Correction rapide.

Exercice 1

1. Pour $x \to 0$:
$$f(x) = \ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$
2.
$$g(x) = \tan(\pi/4 + x)1 + 2x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

Exercice 2

On considère les ensembles $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0 \right\}$ et $D = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

1. Cf.cours
2. On peut utiliser la formule de Grassmann.

Exercice 3

On considère la fonction définie par $f(x) = xe^{(x^2)}$

1. L'étude montre que f définit une bijection impaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note g sa réciproque. D'après le cours g est impaire et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2.
$$f(x) = x + x^3 + x^5/2$$
en 0 à l'ordre 5.
3. On observe que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$. g admet un développement à l'ordre 5 en 0 car elle est C^∞. On le cherche sous forme indéterminée en posant $g(y) = ay + by^3 + cy^5 + o(y^5)$ pour $y \to 0$.
et on trouve :
$$g(y) = y - y^3 + \frac{5}{2}y^5$$

Problème

Soit $n \geq 2$ un entier, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré au plus n et $a < a_0 < a_1 < ... < a_n < b$ une suite de réels distincts 2 à 2.

1. Cf cours : E_n est un espace vectoriel réel, $\dim(E_n) = n + 1$.

On pose pour $i \in [\![1, n]\!]$:

$$L_i = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

2. La famille $L = (L_0, ..., L_n)$ est libre (à prouver) et donc est une base de E_n.

Pour la suite, on fixe f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ de classe C^{n+1} sur $[a, b]$.

3. Le théorème d'interpolation de Lagrange, montre qu'il existe un unique polynôme noté P_f de degré au plus n tel que : $\forall i \in [\![0, n]\!]$:
$$P_f(a_i) = f(a_i)$$
4. $P_f = \sum_{i=0}^{n} f(a_i) L_i$

On fixe $c \in [a, b]$ distincts des nombres $a_0 < ... < a_n$, et on pose

$$g_c(x) = f(x) - P_f(x) - (f(c) - P_f(c)) \prod_{k=0}^{n} \frac{x - a_k}{c - a_k}$$

On pose

5. g_c s'annule en $a_0, ...a_n$ et en c donc en au moins $n + 2$ points de $[a, b]$.
6. Par le théorème de Rolle g_c' s'annule en au moins $n + 1$ points de $[a, b]$, g_c'' s'annule en au moins n points de $[a, b]$ ... $g_c^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.
7. Si ν est un point de $[a, b]$ en lequel $g_c^{(n+1)}$ s'annule alors :
$$f(c) - P_f(c) = \frac{f^{(n+1)}(\nu)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (c - a_k)$$
8. Le résultat précédent reste vrai si c est un des nombres $a_0, \ldots a_n$ car alors les 2 quantités sont nulles.
9. $f^{(n+1)}$ étant continue sur le segment $[a, b]$, on peut poser : $\max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$.
10. On obtient finalement finalement que :
$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - P_f(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \max_{x\in[a,b]} \prod_{k=0}^{n} |x - a_k|$$