Fiche 66 : séries

Exercice 1

Étudier la convergence des séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ suivantes :

$$u_n = \frac{n}{n^3+1} \qquad u_n = \frac{\ln(n^n)}{n!}$$
$$u_n = \frac{(-1)^n+n}{n^2+1} \qquad u_n = \ln\left(\frac{n^2+n-1}{n^2+n+1}\right)$$

Exercice 2

On rappelle que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Montrer la convergence de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

et calculer sa somme à l'aide du rappel ci dessus.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle positive décroissante telle que $\sum u_n$ converge.

1. Montrer que $nu_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. $\left(\text{considérer } \sum_{k=n+1}^{2n} u_k\right)$
2. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} n(u_n - u_{n+1})$ converge et a même somme que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Exercice 4 : Formule de Stirling

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}{n!}$$

1. Étudier la nature de la série $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))\right)$
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}_+^*$ vers un réel λ.
3. Déterminer λ sachant (grâce aux intégrales de Wallis) que :

$$\frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$$

4. En déduire la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$