Fiche 67 : Td du 11-04

Exercice 1

Justifier la convergence et calculer les sommes des séries suivantes

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+2)},\qquad \sum_{n\geq 0}\frac{9}{(3n+1)(3n+4)},$$
$$\sum_{n\geq 0}\frac{n^2+n-3}{n!},\quad \sum_{n\geq 2}\ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right).$$

Exercice 2

Dans cet exercice, on s'intéresse à la série S de terme général $\left(\frac{4(-1)^k}{2k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et du coup à la suite des sommes partielles définie par, si $n\in\mathbb{N}$:

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{4(-1)^k}{2k+1}$$

1. La série S est-elle absolument convergente ?
2. Montrer que la série S est convergente.
   Dans la suite, on cherche à déterminer la valeur de sa somme S_∞.
3. on pose, si $x\in[\![0,1]\!]$,
   $$u_n(x)=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k x^{2k} \text{ et } v_n(x)=\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k x^{2k}$$
   Montrer que
   $$v_n(x)\leq\frac{1}{1+x^2}\leq u_n(x)$$
4. Quelle est la valeur de S_∞ somme de la série S ?

Exercice 3

Soit $z\in\mathbb{C}$ avec $|z|<1$.

1. Montrer que les séries $(\sum_{n\in\mathbb{N}} nz^n)$ et $(\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2z^n)$ convergent.
2. Sous réserve de convergence, calculer $\sum_{n=0}^{\infty} n(z^n-z^{n+1})$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$.
3. Calculer la valeur de : $\sum_{n=0}^{\infty} n^2z^n$

Exercice 4

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ converge (on pourra étudier la suite des sommes partielles).
2. Démontrer que pour $n\to\infty$: $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{n}+\dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}+o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
3. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
4. Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice ?