Fiche 68 : formules de la moyenne.

Exercice 1

Soit $a < b$ réels, $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ telle que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

Exercice 2

Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $a \in]0,1[$ telle que $f(a) = a$.

Exercice 3

Soient $a < b$ réels, $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues, f positive.
Démontrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(c)\int_a^b f(t)\,dt$$

Exercice 4

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue strictement croissante telle que :

$$f(0) = 0,\ \ f(1) = 1.$$

Calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f^n(t)dt.$$

Exercice 5

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Déterminer

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(t^n)\,dt = f(0).$$

Exercice 6

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue ; calculer :

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx.$$