

Fiche 70 : Rappel sue les séries, matrices.

Exercice 1

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs tels que, au voisinage de $+\infty$, on ait

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Montrer que la série de terme général $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ est de ce type ; rappeler pour quelles valeurs de α elle converge.
2. Montrer que si $\alpha < 1$, la série de terme général (a_n) diverge, et que, si $\alpha > 1$, elle converge.
3. Application : étudier la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n+2)}.$$

Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Déterminer la matrice de f dans la base $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 3

Soit h l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ les bases canoniques (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2) par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. On prend dans $\mathbb{R}^3$ la nouvelle base :

$$e'_1 = e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_3 + e_1, \quad e'_3 = e_1 + e_2.$$

Quelle est la nouvelle matrice A_1 de h ?

2. On choisit pour base de $\mathbb{R}^2$ les vecteurs :

$$f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$$

en conservant la base (e'_1, e'_2, e'_3) de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la nouvelle matrice A_2 de h ?

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan F d'équation $x + y - z = 0$ et $G = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer rapidement que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
2. Déterminer les matrices dans les bases canoniques des projections p (sur F) et q (sur G) ainsi que des symétries r (par rapport à F) et s (par rapport à G) associées.
3. Déterminer une base B adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
4. Déterminer les matrices dans B de p, q, r, s .