Modélisation des systèmes asservis

N. Mesnier
Lycée Jean Perrin, Lyon

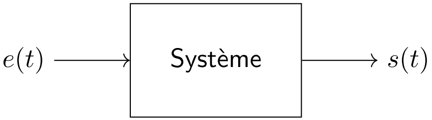
2024–2025

Plan du cours

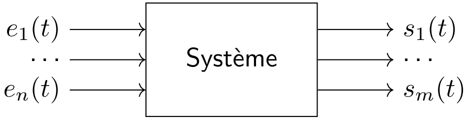
1 2 3 4

Introduction

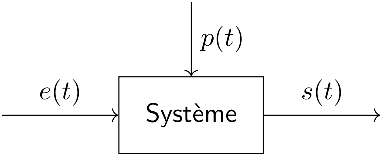
Système
Schéma fonctionnel



Système mono-variable



Système multi-variables



- $e(t)$: commande (E)
- $p(t)$: perturbation (E)
- $s(t)$: réponse du système (S)

Système automatisé
Définitions

Définition (Système automatisé)

Un système automatisé est un système réalisant des opérations et pour lequel l'intervention humaine est limitée à la programmation du système et à son réglage préalable.

Définition (Système de commande)

Un système de commande est un système dont la vocation est de piloter un processus.

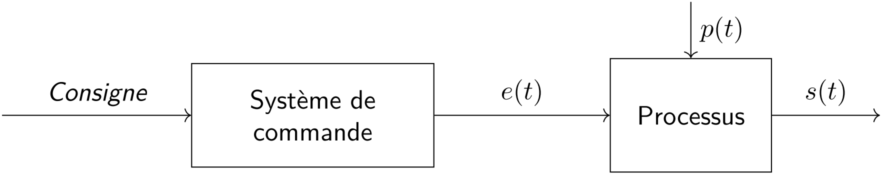
Définition (Système automatisé)

Un système automatisé est un système réalisant des opérations et pour lequel l'intervention humaine est limitée à la programmation du système et à son réglage préalable.

Définition (Système de commande)

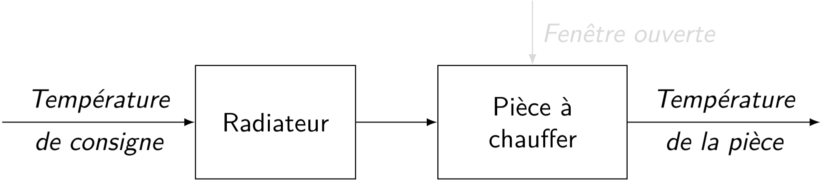
Un système de commande est un système dont la vocation est de piloter un processus.

Système automatisé
Structure de commande en boucle ouverte



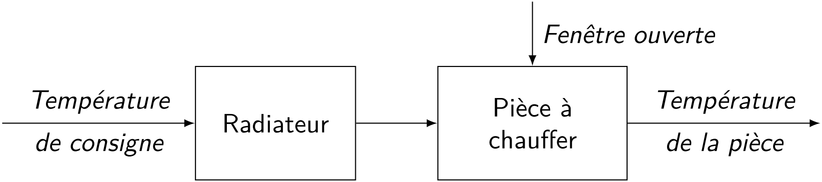
Exemple

Chauffage d'une pièce à 20°C



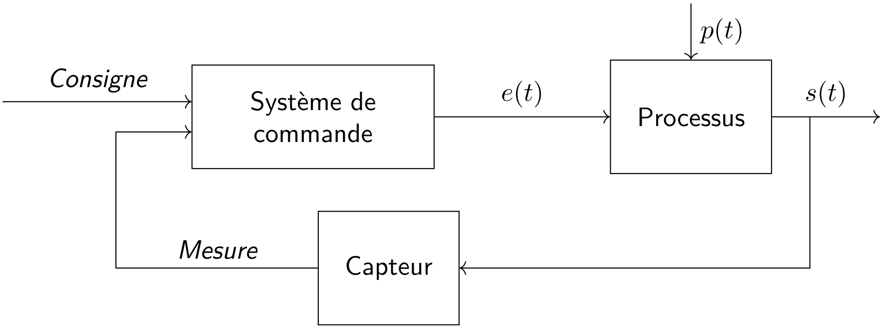
Exemple

Chauffage d'une pièce à 20°C



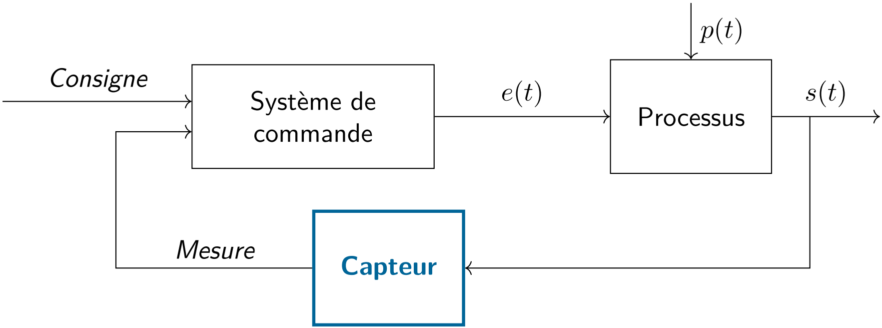
Système automatisé

Structure de commande en boucle fermée



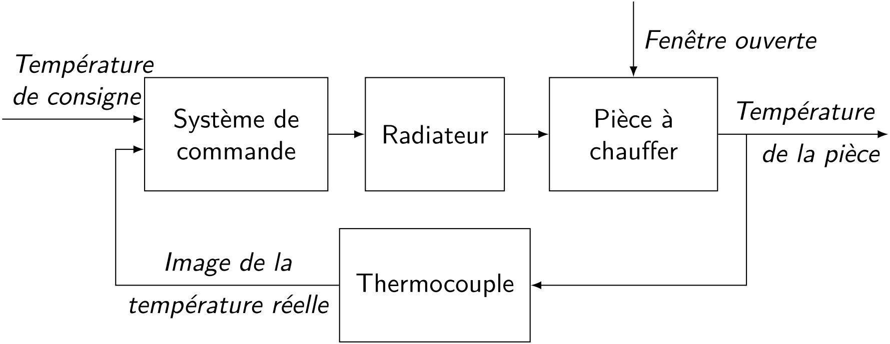
Système automatisé

Structure de commande en boucle fermée



Exemple

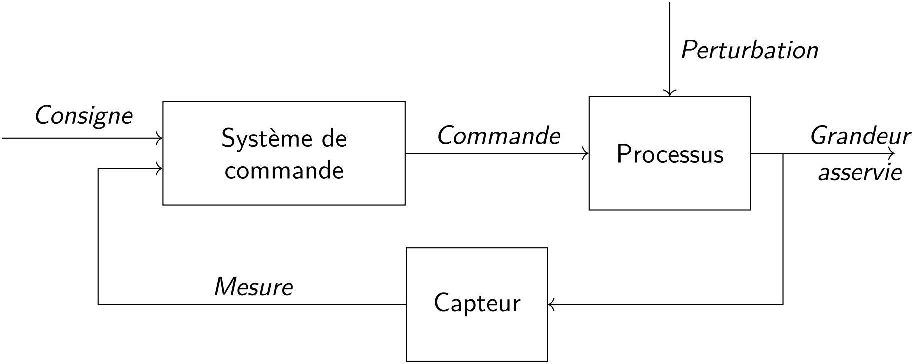
Chauffage d'une pièce à 20°C



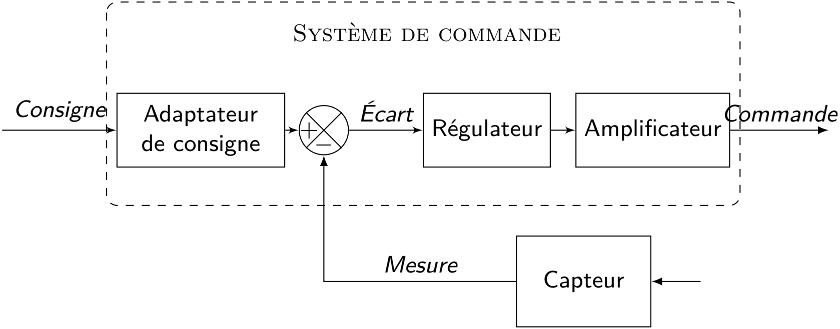
Système asservi

Définition (Système asservi)

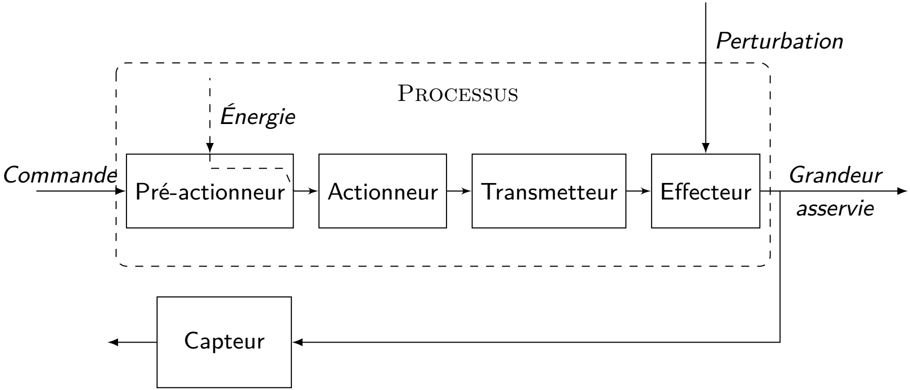
Un système asservi est l'association d'un processus, de capteurs et d'un système de commande permettant, à partir des consignes, de piloter une ou plusieurs grandeurs physiques du processus.



Système asservi
Structure du système de commande



Système asservi
Structure du processus



Performances de la commande d'un système

Définition (Système causal)

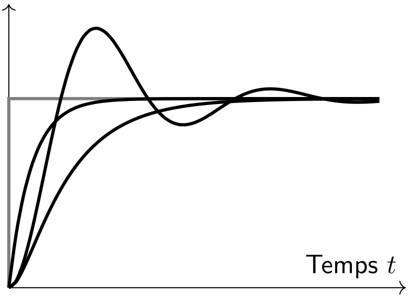
Un système est dit causal si sa réponse à un instant donné ne dépend que des entrées précédant cet instant.

Performances :

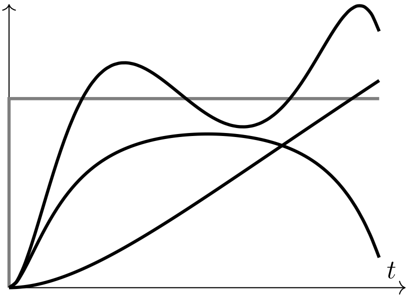
- **stabilité** : la réponse du système converge-t-elle pour une entrée constante ?
- **précision** : le système asservi atteint-il la valeur de consigne ?
- **rapidité** : le combien de temps faut-il au système pour se stabiliser ?
- **dépassements** : la grandeur de sortie a-t-elle tendance à dépasser la valeur à convergence et osciller autour avant de se stabiliser ?
- **sensibilité aux perturbations** : les perturbations agissant sur le système modifient-elles la valeur à convergence de la grandeur asservie ?

Définition (Stabilité)

Un système est stable si pour toute entrée bornée, la sortie est bornée.



Systèmes stables



Systèmes instables

Vidéo : hélicoptère

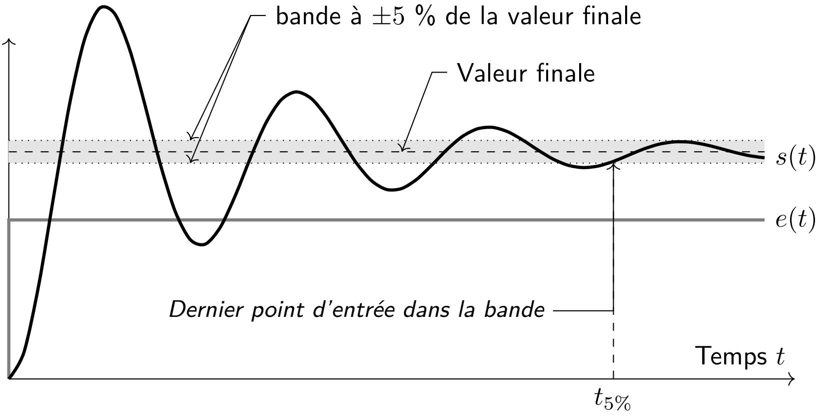
Définition (Rapidité)

Un système est rapide s'il converge en un temps court au regard de son contexte d'utilisation.

Définition (Temps de réponse à 5 %)

Le temps de réponse à 5 % d'un système, noté $t_{5\%}$, correspond au temps mis par la réponse de ce système soumis à un échelon pour entrer définitivement dans une bande à ± 5 % de sa valeur finale.

Temps de réponse à 5 %



Définition (Précision)

La précision qualifie l'aptitude d'un système à respecter la consigne.

Définition (Erreur)

L'erreur $\varepsilon(t)$ est la différence entre la consigne $e(t)$ et la sortie $s(t)$:

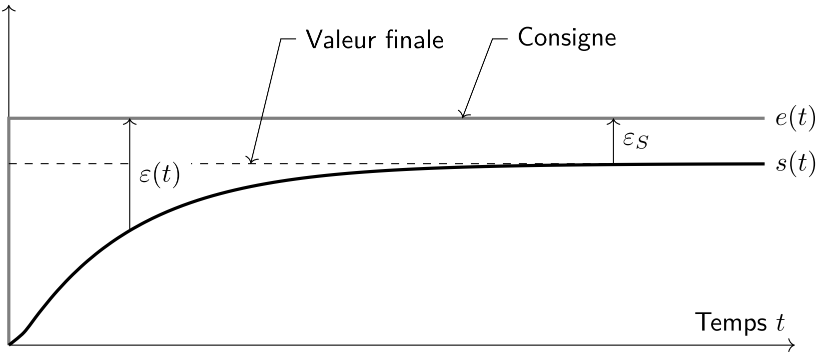
$$\varepsilon(t) = e(t) - s(t)$$

Elle n'est définie que si la consigne et la sortie sont de même nature.

Définition (Erreur statique)

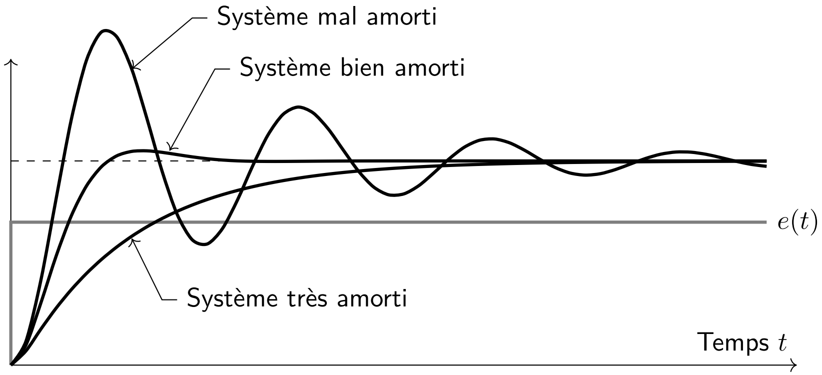
L'erreur statique ε_S est la limite au temps long de l'erreur associée à la réponse d'un système soumis à un échelon :

$$\varepsilon_S = \lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t)$$


Valeur finale
Consigne
$e(t)$
ε_S
$s(t)$
$\varepsilon(t)$
Temps t

Définition (Dépassements)

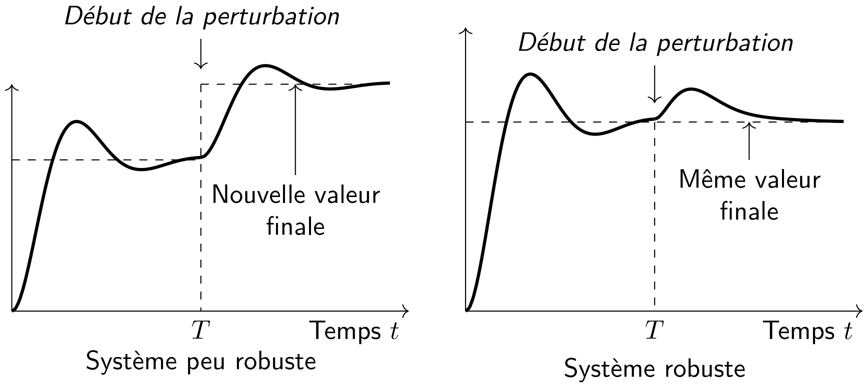
Un système stable présente des dépassements si sa réponse oscille de façon transitoire autour de la valeur finale avant de l'atteindre.



Vidéo : sans et avec dépassements

Définition (Sensibilité aux perturbations)

Un système est sensible aux perturbations s'il ne converge pas vers les mêmes valeurs finales selon qu'une perturbation s'applique ou non.



1 2 3 4

Modélisation du comportement dynamique

Définition (Modèle mathématique d'un système)

Le modèle mathématique d'un système dynamique correspond à l'ensemble des lois mathématiques régissant la causalité entre ses entrées et ses sorties.

Types de modèles :

- les **modèles de connaissance**
  construits de façon analytique à partir des lois de la physique régissant le comportement des constituants d'un système.
- les **modèles de comportement**
  construits par identification à partir de résultats expérimentaux obtenus avec les systèmes réels.

Objectifs de la modélisation

Modélisation = étape préliminaire de l'**analyse** d'un système
Finalité :

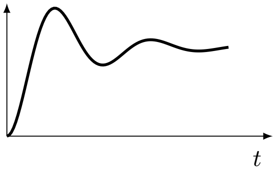
simuler et prédire
le comportement dynamique d'un système

Pour cela, il faut :

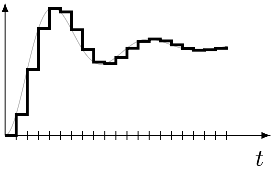
- proposer une modélisation des variables d'entrée (consignes, perturbations, etc.) ;
- modéliser le système global ;
- simuler le comportement du système (à la main ou par ordinateur) ;
- analyser la réponse de la simulation du comportement du système, c'est-à-dire analyser l'évolution de la sortie du modèle du système.

Définition (Système continu)

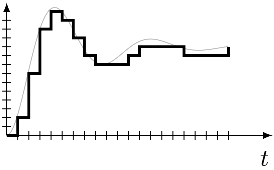
Un système est dit continu si les fonctions définissant ses entrées et sorties sont continues, c'est-à-dire définies pour tout instant.



(a) Représentation continue



(b) Échantillonnage (en temps)



(c) Échantillonnage & quantification (valeur)

Définition (Système linéaire)

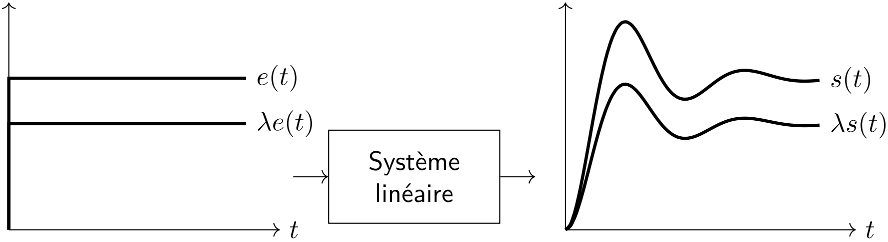
Un système linéaire est un système continu décrit par des équations différentielles linéaires.

Un système linéaire vérifie :

- le principe de proportionnalité ;
- le principe de superposition.

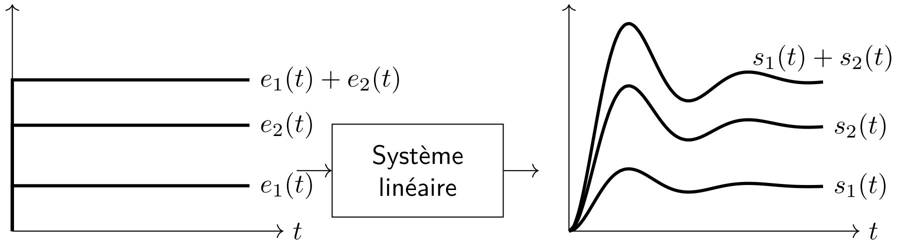
Définition (Principe de proportionnalité)

Un système vérifie le principe de proportionnalité (ou d'homogénéité) si à un multiple d'une entrée quelconque correspond le même multiple de la sortie correspondante.



Définition (Principe de superposition)

Un système vérifie le principe de superposition si à la somme de deux entrées quelconques correspond la somme des deux sorties correspondantes.

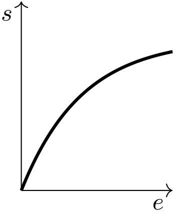


Un système linéaire vérifie $(\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$:

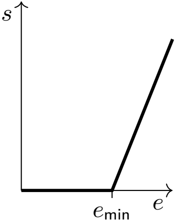
$$\alpha_1\ e_1(t) + \alpha_2\ e_2(t) \longrightarrow \boxed{\text{Système linéaire}} \longrightarrow \alpha_1\ s_1(t) + \alpha_2\ s_2(t)$$

Problème :
tous les systèmes n'ont pas une caractéristique linéaire !

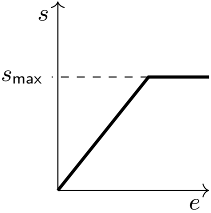
Exemples de non-linéarités :



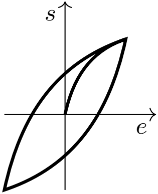
(a) Courbure



(b) Seuil

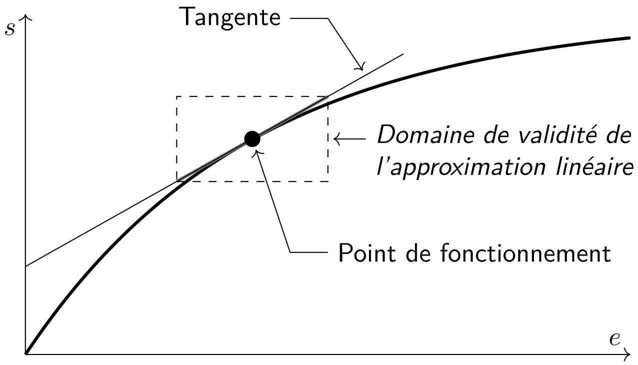


(c) Saturation



(d) Hystérésis

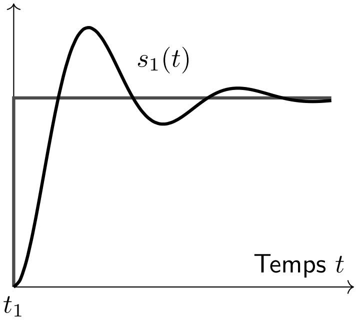
Si non linéaire,
linéarisation autour d'un point de fonctionnement :

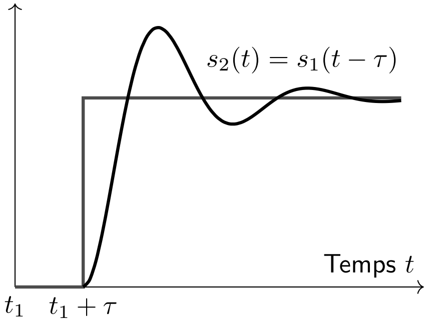


Hypothèses de modélisation
Systèmes invariants

Définition (Système invariant)

Un système est dit invariant si ses caractéristiques et propriétés régissant son comportement sont invariables dans le temps.

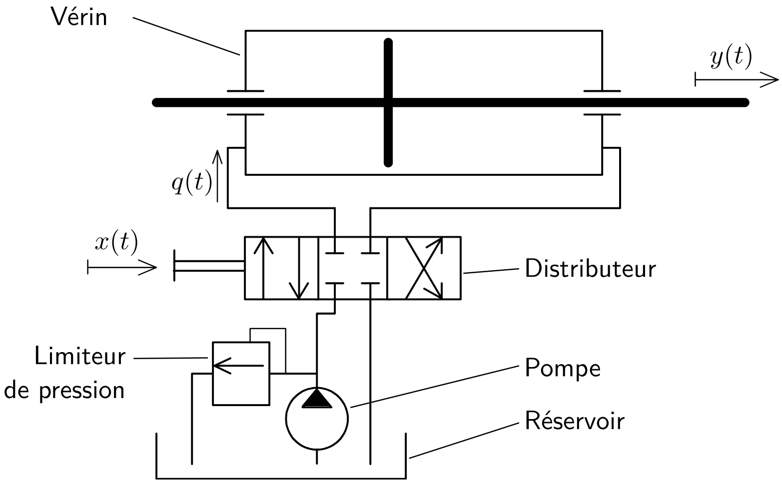




SLCI = Systèmes Linéaires Continus Invariants

Si H représente le modèle mathématique d'un système
qui relie la sortie $s(t)$ *et l'entrée* $e(t)$ alors :

- un système est linéaire : $H\left(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2\right) = \alpha_1 H(e_1) + \alpha_2 H(e_2)$
- un système est continu : la fonction H est une fonction continue du temps t ;
- un système est invariant : la réponse du système est indépendant du temps, c'est-à-dire si $e(t)$ induit $s(t)$ alors $e\left(t+\tau\right)$ induit $s\left(t+\tau\right)$.



Vérin
$y(t)$
$q(t)$
$x(t)$
Distributeur
Limiteur
de pression
Pompe
Réservoir

Équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme :

$$a_0\ e(t) + a_1\ \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}(t) + \cdots + a_m\ \frac{\mathrm{d}^m e}{\mathrm{d}t^m}(t) = b_0\ s(t) + b_1\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) + \cdots + b_n\ \frac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}t^n}(t)$$

où a_0, a_1,. . .,a_m et b_0, b_1,. . .,b_n sont des constantes réelles.

Principe de causalité : $n \geqslant m$

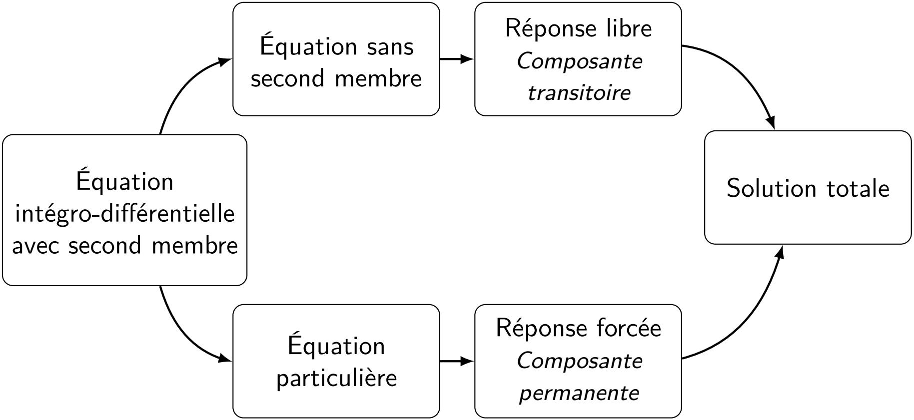
Notations :

$\dot{y}(t) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t)$	dérivée 1re de y par rapport au temps
$\ddot{y}(t) = \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t)$	dérivée 2nde de y par rapport au temps

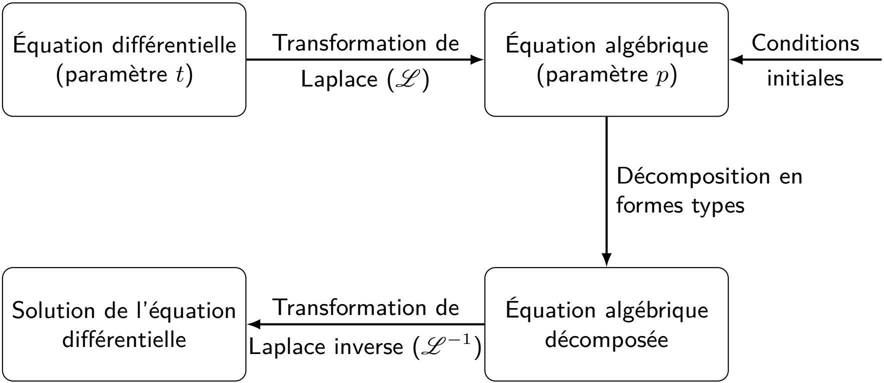
1 2 3 4

Résolution par la transformée de Laplace

Résolution des équations intégro-différentielles



Intérêt de la transformée de Laplace



Définition de la transformée de Laplace

Définition (Transformée de Laplace)

Soit f une fonction causale continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ telle que $f(t) = 0$ pour tout $t < 0$. On appelle transformée de Laplace de f, la fonction $F = \mathscr{L}[f]$ de la variable complexe p définie par la relation intégrale :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$$

pour toutes les valeurs de $p \in \mathbb{C}$ pour laquelle cette intégrale impropre converge.

Intégrale impropre (notation) :

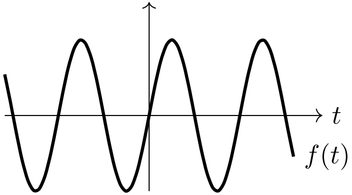
$$\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{déf.}}{=} \lim_{\tau \to +\infty} \int_0^{\tau} g(t)\,\mathrm{d}t$$

Définition de la transformée de Laplace

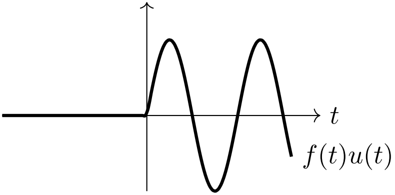
Fonction de Heaviside (ou échelon unité) :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{sinon } (t \geqslant 0) \end{cases}$$

Fonction causale :



Fonction non causale



Fonction causale

Propriétés de la transformée de Laplace

Propriété (Unicité)

À une fonction f correspond une seule transformée de Laplace $F = \mathscr{L}\left[f\right]$.

Démonstration...

Propriétés de la transformée de Laplace

Théorème (Linéarité)

La transformée de Laplace d'une combinaison linéaire de deux fonctions f et g (dont la transformée de Laplace existe) est la combinaison linéaire des transformées de Laplace de ces deux fonctions.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \mathscr{L}\left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right] = \alpha F(p) + \beta G(p)$$

Démonstration...

Propriétés de la transformée de Laplace

Théorème (Dérivation)

Si f est une fonction dérivable dont la transformée de Laplace existe alors la transformée de Laplace de sa dérivée est définie par :

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)\right] = pF(p) - f(0)$$

Démonstration. . .

Propriétés de la transformée de Laplace

Théorème (Dérivation d'ordre 2)

Si f est une fonction deux fois dérivable et dont la transformée de Laplace existe alors la transformée de Laplace de sa dérivée seconde est définie par :

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}(t)\right] = p^2 F(p) - pf(0) - \dot{f}(0)$$

Démonstration...

Propriétés de la transformée de Laplace

Théorème (Dérivation d'ordre n)

Si f est une fonction n fois dérivable et dont la transformée de Laplace existe alors la transformée de Laplace de sa n-ième dérivée est définie par :

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}t^n}(t)\right] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} \dot{f}(0) - \cdots - \frac{\mathrm{d}^{n-1} f}{\mathrm{d}t^{n-1}}(0)$$

Démonstration. . .

Propriétés de la transformée de Laplace

Conditions de Heaviside :

$$f(0)=0, \quad \dot{f}(0)=0, \quad \ddot{f}(0)=0, \quad \cdots \quad \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}t^n}(0)=0$$

Dérivation et conditions de Heaviside :

Si le système est dans des conditions de Heaviside alors :

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)\right]=p\;F(p)$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}(t)\right]=p^2\;F(p)$$

$$\vdots$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}t^n}(t)\right]=p^n\;F(p)$$

Propriétés de la transformée de Laplace

Propriété (Intégration d'une fonction causale)

La transformée de Laplace d'une fonction g définie par :

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

et de valeur initiale nulle est égale à :

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \frac{F(p)}{p}$$

Démonstration...

Propriétés de la transformée de Laplace

Théorème (Retard)

Soient f et g deux fonctions temporelles d'allure identique mais décalées dans le temps dune valeur τ. Si g est définie par :

$$\begin{cases} g(t) = 0 & \text{pour } 0 \leqslant t < \tau \\ g(t) = f(t-\tau) & \text{pour } t \geqslant \tau \end{cases}$$

alors

$$\mathscr{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-p\tau}\mathscr{L}\left[f(t)\right] = e^{-p\tau}F(p)$$

Démonstration...

Propriétés de la transformée de Laplace

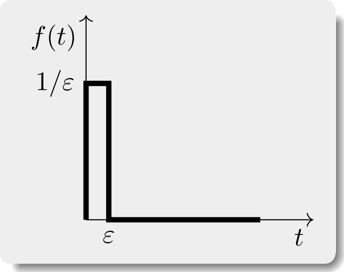
Théorème (Modulation/amortissement)

Soient $f(t)$ *une fonction causale et* e^{-at} *une fonction de modulation avec* $a \in \mathbb{C}$. *La transformée de Laplace de la fonction modulée* $f(t)\,e^{-at}$ *est définie par :*

$$\mathscr{L}\left[f(t)\,e^{-at}\right] = F(p+a)$$

Démonstration...

Transformée de Laplace d'une impulsion



L'impulsion unité ou distribution de Dirac :

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(t)$$

avec :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} & \text{si } t \in [0, \varepsilon[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

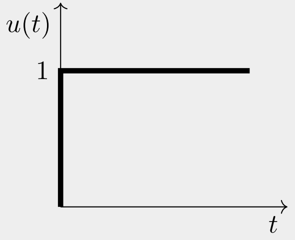
Théorème

La transformée de Laplace de l'impulsion unité est égale à

$$\mathscr{L}\left[\delta(t)\right] = 1$$

Démonstration. . .

Transformée de Laplace d'un échelon



Échelon unitaire ou fonction de Heaviside :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geqslant 0 \\ u(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Théorème

La transformée de Laplace de l'échelon unitaire est égale à

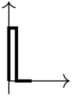
$$\mathscr{L}\left[u(t)\right] = \frac{1}{p}$$

Démonstration...

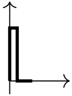
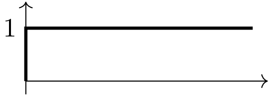
Transformée de Laplace de fonctions usuelles (1/3)

Fonction	**Allure**	$f(t)$	$F(p)$
Impulsion		$\delta(t)$	1
Échelon		$u(t)$	$\dfrac{1}{p}$
Rampe		$a\ t\ u(t)$	$\dfrac{a}{p^2}$
Puissance		$t^n\ u(t)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$

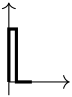
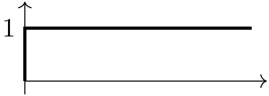
Transformée de Laplace de fonctions usuelles (1/3)

Fonction	Allure	$f(t)$	$F(p)$
Impulsion		$\delta(t)$	1
Échelon		$u(t)$	$\frac{1}{p}$
Rampe		$a\ t\ u(t)$	$\frac{a}{p^2}$
Puissance		$t^n\ u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$

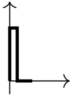
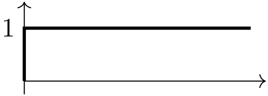
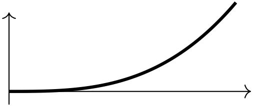
Transformée de Laplace de fonctions usuelles (1/3)

Fonction	**Allure**	$f(t)$	$F(p)$
Impulsion		$\delta(t)$	1
Échelon		$u(t)$	$\dfrac{1}{p}$
Rampe		$a\ t\ u(t)$	$\dfrac{a}{p^2}$
Puissance		$t^n\ u(t)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$

Transformée de Laplace de fonctions usuelles (1/3)

Fonction	Allure	$f(t)$	$F(p)$
Impulsion		$\delta(t)$	1
Échelon		$u(t)$	$\dfrac{1}{p}$
Rampe		$a\ t\ u(t)$	$\dfrac{a}{p^2}$
Puissance		$t^n\ u(t)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$

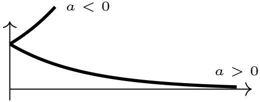
Transformée de Laplace de fonctions usuelles (1/3)

Fonction	Allure	$f(t)$	$F(p)$
Impulsion		$\delta(t)$	1
Échelon		$u(t)$	$\frac{1}{p}$
Rampe		$a\ t\ u(t)$	$\frac{a}{p^2}$
Puissance		$t^n\ u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$

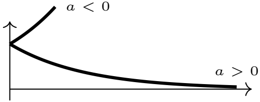
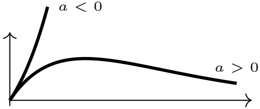
Transformée de Laplace de fonctions usuelles (2/3)

Fonction	Allure	$f(t)$	$F(p)$
Exponentielle		$e^{-at}\ u(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$
		$t\ e^{-at}\ u(t)$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
Sinus		$\sin(\omega t)\ \ u(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
Cosinus		$\cos(\omega t)\ \ u(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

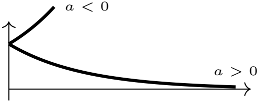
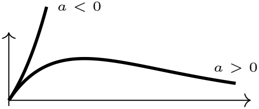
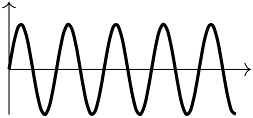
Transformée de Laplace de fonctions usuelles (2/3)

Fonction	**Allure**	$f(t)$	$F(p)$
Exponentielle		$e^{-at}\ u(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$
		$t\ e^{-at}\ u(t)$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
Sinus		$\sin(\omega t)\ \ u(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
Cosinus		$\cos(\omega t)\ \ u(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

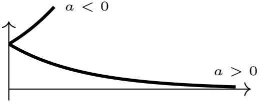
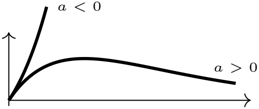
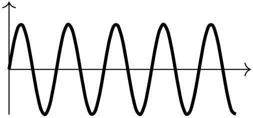
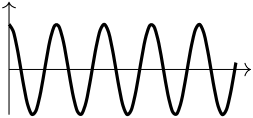
Transformée de Laplace de fonctions usuelles (2/3)

Fonction	Allure	$f(t)$	$F(p)$
Exponentielle		$e^{-at}\ u(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$
		$t\ e^{-at}\ u(t)$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
Sinus		$\sin(\omega t)\ \ u(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
Cosinus		$\cos(\omega t)\ \ u(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

Transformée de Laplace de fonctions usuelles (2/3)

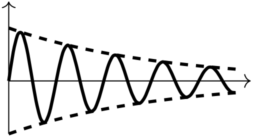
Fonction	Allure	$f(t)$	$F(p)$
Exponentielle		$e^{-at}\ u(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$
		$t\ e^{-at}\ u(t)$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
Sinus		$\sin(\omega t)\ \ u(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
Cosinus		$\cos(\omega t)\ \ u(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

Transformée de Laplace de fonctions usuelles (2/3)

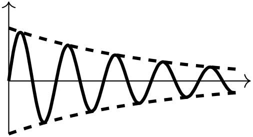
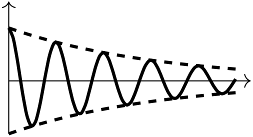
Fonction	**Allure**	$f(t)$	$F(p)$
Exponentielle		$e^{-at}\ u(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$
		$t\ e^{-at}\ u(t)$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
Sinus		$\sin(\omega t)\ \ u(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
Cosinus		$\cos(\omega t)\ \ u(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

Transformée de Laplace de fonctions usuelles (3/3)

Fonction	**Allure**	$f(t)$	$F(p)$
Sinus amorti		$\sin(\omega t)\, e^{-at} u(t)$	$\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
Cosinus amorti		$\cos(\omega t)\, e^{-at} u(t)$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

Fonction	**Allure**	$f(t)$	$F(p)$
Sinus amorti		$\sin\left(\omega t\right) e^{-at}u(t)$	$\dfrac{\omega}{\left(p+a\right)^2+\omega^2}$
Cosinus amorti		$\cos\left(\omega t\right) e^{-at}u(t)$	$\dfrac{p+a}{\left(p+a\right)^2+\omega^2}$

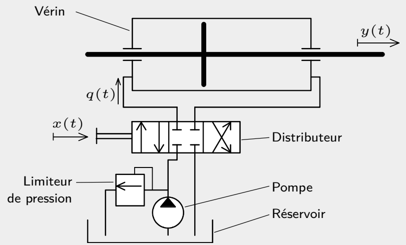
Transformée de Laplace de fonctions usuelles (3/3)

Fonction	Allure	$f(t)$	$F(p)$
Sinus amorti		$\sin\left(\omega t\right) e^{-at} u(t)$	$\dfrac{\omega}{\left(p+a\right)^2+\omega^2}$
Cosinus amorti		$\cos\left(\omega t\right) e^{-at} u(t)$	$\dfrac{p+a}{\left(p+a\right)^2+\omega^2}$

Exemple : commande de vérin hydraulique

Équation régissant le déplacement de la tige du vérin :

$$\dot{y}(t) = \frac{K}{S}\,x(t)$$



Transformées de Laplace :

$$\mathscr{L}\left[\dot{y}(t)\right] = pY(p) - y(0)$$

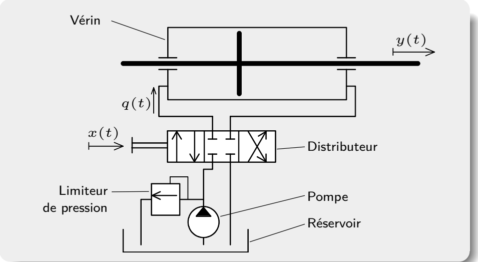
$$\mathscr{L}\left[\frac{K}{S}x(t)\right] = \frac{K}{S}X(p)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{K}{S}\,x(t) \quad \xrightarrow{\mathscr{L}} \quad Y(p) = \frac{1}{p}\left(\frac{K}{S}X(p) + y(0)\right)$$

Exemple : commande de vérin hydraulique

Équation régissant le déplacement de la tige du vérin :

$$\dot{y}(t) = \frac{K}{S}\, x(t)$$



Transformées de Laplace :

$$\mathscr{L}\left[\dot{y}(t)\right] = pY(p) - y(0)$$

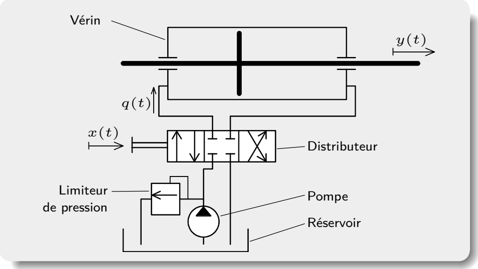
$$\mathscr{L}\left[\frac{K}{S}x(t)\right] = \frac{K}{S}X(p)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{K}{S}\, x(t) \quad \xrightarrow{\mathscr{L}} \quad Y(p) = \frac{1}{p}\left(\frac{K}{S}X(p) + y(0)\right)$$

Exemple : commande de vérin hydraulique

Équation régissant le déplacement de la tige du vérin :

$$\dot{y}(t) = \frac{K}{S}\,x(t)$$



Transformées de Laplace :

$$\mathscr{L}\left[\dot{y}(t)\right] = pY(p) - y(0)$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{K}{S}x(t)\right] = \frac{K}{S}X(p)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{K}{S}\,x(t) \quad \xrightarrow{\mathscr{L}} \quad Y(p) = \frac{1}{p}\left(\frac{K}{S}X(p) + y(0)\right)$$

Produit de convolution

Définition (Produit de convolution)

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

$$e(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow s(t) = (e * h)(t)$$

Théorème (Convolution)

La transformée de Laplace du produit de convolution de deux fonctions f et g (dont les transformées existent) est définie par :

$$\mathscr{L}\left[(f * g)(t)\right] = F(p)\, G(p)$$

Démonstration. . .

Fonction de transfert

Domaine temporel

$$e(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow s(t) = (e * h)(t)$$

Domaine de Laplace

$$E(p) \longrightarrow \boxed{H(p)} \longrightarrow S(p) = H(p)E(p)$$

Définition (Fonction de transfert)

On appelle fonction de transfert ou transmittance le rapport entre la transformée de Laplace du signal d'entrée $e(t)$ et celle du signal de sortie $s(t)$:

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

Fonction de transfert

Fonction de transfert = fraction rationnelle :

$$H(p) = \frac{a_0 + a_1\,p + a_2\,p^2 + \cdots + a_m\,p^m}{b_0 + b_1\,p + b_2\,p^2 + \cdots + b_n\,p^n} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Définition (Forme canonique)

On appelle forme canonique d'une fonction de transfert la représentation qui consiste à imposer une constante unitaire aux polynômes

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha}\,\frac{1 + a_{1'}\,p + a_{2'}\,p^2 + \cdots + a_{m'}\,p^m}{1 + b_{1'}\,p + b_{2'}\,p^2 + \cdots + b_{r'}\,p^r}$$

de façon à faire apparaître le gain K et la classe α du système d'ordre n.

On appelle :

- **pôles** = racines du dénominateur $D(p)$
- **zéros** = racines du numérateur $N(p)$

Propriétés asymptotiques

Ne concerne que les systèmes stables !

Théorème (Valeur initiale)

Si une fonction f est causale et que la transformée de Laplace de sa dérivée existe alors sa valeur initiale peut être obtenue à partir de sa transformée de Laplace selon :

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to \infty} p\, F(p)$$

Démonstration...

Propriétés asymptotiques

Ne concerne que les systèmes stables !

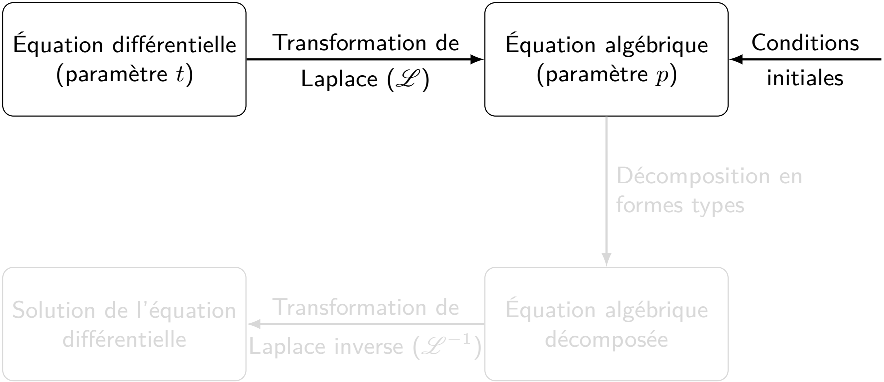
Théorème (Valeur finale)

Si une fonction f admet une limite finie pour $t \to +\infty$ et que la transformée de Laplace de sa dérivée existe alors sa valeur finale peut être obtenue à partir de sa transformée de Laplace selon :

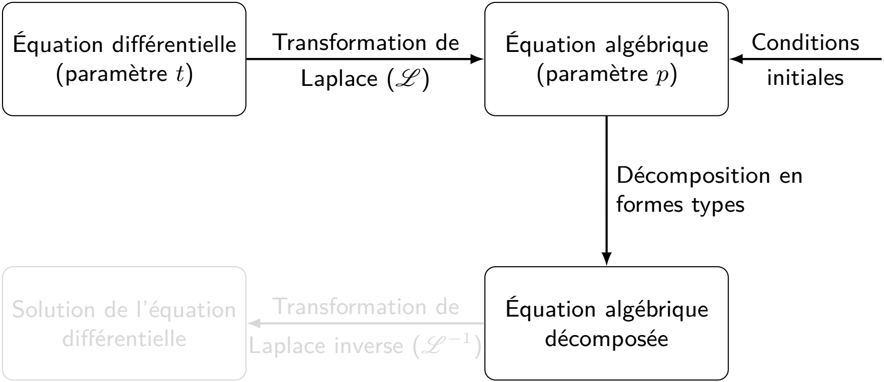
$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} p\, F(p)$$

Démonstration. . .

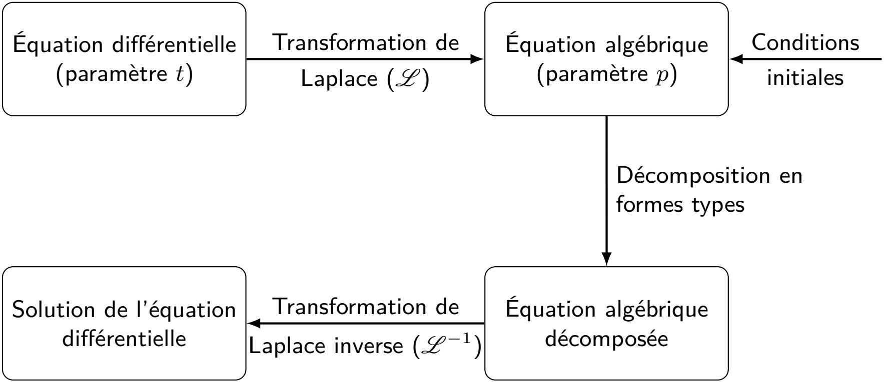
Expression de la réponse temporelle ?



Expression de la réponse temporelle ?



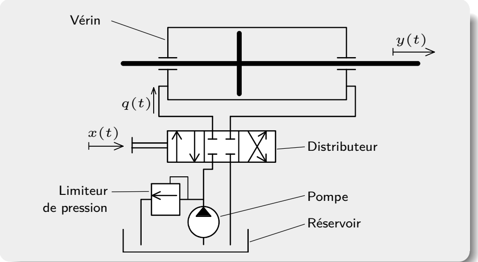
Expression de la réponse temporelle ?



Exemple : commande de vérin hydraulique

Équation régissant le déplacement de la tige du vérin dans le domaine Laplace :

$$Y(p) = \frac{1}{p}\left(\frac{K}{S}X(p) + y(0)\right)$$



Si :

- conditions de Heaviside ⇒ $y(0) = 0$
- $x(t) = u(t)$ échelon unitaire tel que $X(p) = 1/p$

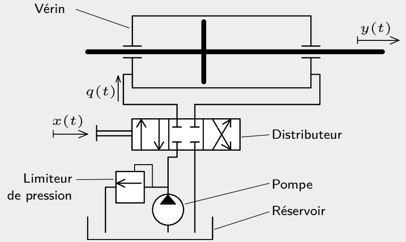
alors :

$$Y(p) = \frac{K}{S\,p^2} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} y(t) = \frac{K}{S}\,t \qquad \forall t \geqslant 0$$

Exemple : commande de vérin hydraulique

Équation régissant le déplacement de la tige du vérin dans le domaine Laplace :

$$Y(p) = \frac{1}{p}\left(\frac{K}{S}X(p) + y(0)\right)$$



Si :

- conditions de Heaviside $\Rightarrow \quad y(0) = 0$
- $x(t) = u(t)$ échelon unitaire tel que $X(p) = 1/p$

alors :

$$Y(p) = \frac{K}{S\,p^2} \quad \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \quad y(t) = \frac{K}{S}\,t \qquad \forall t \geqslant 0$$

Décomposition en éléments simples

■ Étape 0 : Causalité ?

On se limitera aux fractions $\dfrac{N(p)}{D(p)}$ vérifiant $\deg N(p) \leqslant \deg D(p)$.

■ Étape 1 : Factorisation du dénominateur

Calculer les pôles du dénominateur puis le mettre sous forme factorisée :

$$D(p) = \underbrace{(p-a_1)}_{\text{réel simple}} \dots \underbrace{(p-a_2)^K}_{\text{réel multiple}} \dots \underbrace{(p-z_1)(p-\overline{z_1})}_{\text{complexe conjugué simple}} \dots \underbrace{(p-z_2)^K(p-\overline{z_2})^K}_{\text{complexe conjugué multiple}}$$

Décomposition en éléments simples

Étape 0 : Causalité ?

On se limitera aux fractions $\dfrac{N(p)}{D(p)}$ vérifiant $\deg N(p) \leqslant \deg D(p)$.

Étape 1 : Factorisation du dénominateur

Calculer les pôles du dénominateur puis le mettre sous forme factorisée :

$$D(p) = \underbrace{(p - a_1)}_{\text{réel simple}} \dots \underbrace{(p - a_2)^K}_{\text{réel multiple}} \dots \underbrace{(p - z_1)\,(p - \overline{z_1})}_{\text{complexe conjugué simple}} \dots \underbrace{(p - z_2)^K\,(p - \overline{z_2})^K}_{\text{complexe conjugué multiple}}$$

Décomposition en éléments simples

$$D(p) = \underbrace{(p-a_1)}_{\text{réel simple}} \dots \underbrace{(p-a_2)^K}_{\text{réel multiple}} \dots \underbrace{(p-z_1)\,(p-\overline{z_1})}_{\text{complexe conjugué simple}} \dots \underbrace{(p-z_2)^K\,(p-\overline{z_2})^K}_{\text{complexe conjugué multiple}}$$

Étape 2 : Forme de la décomposition

- ***Pôle réel*** a, de multiplicité $K \geqslant 1 \Rightarrow$ décomposition :

$$\sum_{\beta=1}^{K} \frac{A_\beta}{(p-a)^\beta} = \frac{A_1}{p-a} + \frac{A_2}{(p-a)^2} + \dots + \frac{A_K}{(p-a)^K}$$

$\Rightarrow$ déterminer K coefficients réels A_1, A_2,…, A_K.

Décomposition en éléments simples

$$D(p) = \underbrace{(p-a_1)}_{\text{réel simple}} \dots \underbrace{(p-a_2)^K}_{\text{réel multiple}} \dots \underbrace{(p-z_1)\,(p-\overline{z_1})}_{\text{complexe conjugué simple}} \dots \underbrace{(p-z_2)^K\,(p-\overline{z_2})^K}_{\text{complexe conjugué multiple}}$$

Étape 2 : Forme de la décomposition

▶ ***Couple de pôles complexes conjugués*** $z = \alpha + j\beta$ et $\bar{z} = \alpha - j\beta$, de multiplicité $K \geqslant 1$, on exploitera la forme polynômiale

$$(p-z)\,(p-\overline{z}) = p^2 + b\,p + c$$

avec $b = -2\alpha$ et $c = \alpha^2 + \beta^2$ et on cherchera une décomposition sous la forme :

$$\sum_{\beta=1}^{K} \frac{B_\beta\,p + C_\beta}{(p^2+b\,p+c)^\beta} = \frac{B_1\,p + C_1}{(p^2+b\,p+c)} + \frac{B_2\,p + C_2}{(p^2+b\,p+c)^2} + \dots + \frac{B_K\,p + C_K}{(p^2+b\,p+c)^K}$$

$\Rightarrow$ déterminer $2K$ coefficients réels B_1, C_1, B_2, C_2, ..., B_K et C_K.

Décomposition en éléments simples

Étape 3 : Détermination des coefficients

Pour déterminer n coefficients, il faut établir un système de n équations à partir de n valeurs particulières de p (différentes).

Seules les deux règles sont toujours valables :

- le coefficient de degré le plus élevé A_K associé à un pôle réel a, de multiplicité $K \geqslant 1$, est égal à :

$$A_K = \lim_{p \to a} (p-a)^K \frac{N(p)}{D(p)}$$

- les coefficients de degré le plus élevés B_K et C_K associés à un couple de pôles complexes conjugués $z = \alpha + j\beta$ et $\bar{z} = \alpha - j\beta$, de multiplicité $K \geqslant 1$, sont respectivement égaux à :

$$\begin{cases} B_K = \dfrac{1}{\beta} \Im\left(\lim\limits_{p \to \alpha + j\beta} (p^2 + bp + c)^K \dfrac{N(p)}{D(p)} \right) \\ C_K = \Re\left(\lim\limits_{p \to \alpha + j\beta} (p^2 + bp + c)^K \dfrac{N(p)}{D(p)} \right) - \alpha\, B_K \end{cases}$$

où $\Re$ et $\Im$ sont respectivement les fonctions partie réelle et partie imaginaire.

Décomposition en éléments simples

Étape 3 : Détermination des coefficients

Pour déterminer n coefficients, il faut établir un système de n équations à partir de n valeurs particulières de p (différentes).

Seules les deux règles sont toujours valables :

- le coefficient de degré le plus élevé A_K associé à un pôle réel a, de multiplicité $K \geqslant 1$, est égal à :

$$A_K = \lim_{p \to a} (p-a)^K \frac{N(p)}{D(p)}$$

- les coefficients de degré le plus élevés B_K et C_K associés à un couple de pôles complexes conjugués $z = \alpha + j\beta$ et $\bar{z} = \alpha - j\beta$, de multiplicité $K \geqslant 1$, sont respectivement égaux à :

$$\begin{cases} B_K = \dfrac{1}{\beta} \Im \left(\lim\limits_{p \to \alpha + j\beta} \left(p^2 + bp + c\right)^K \dfrac{N(p)}{D(p)} \right) \\ C_K = \Re \left(\lim\limits_{p \to \alpha + j\beta} \left(p^2 + bp + c\right)^K \dfrac{N(p)}{D(p)} \right) - \alpha \, B_K \end{cases}$$

où $\Re$ et $\Im$ sont respectivement les fonctions partie réelle et partie imaginaire.

Résolution d'équations différentielles

Exemple (Résolution d'une équation différentielle)

Résoudre l'équation différentielle suivante en utilisant la transformée de Laplace

$$y''(t) + 6y'(t) + 5y(t) = 3 \qquad \text{avec } y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 2$$

Exemple (Résolution d'une équation différentielle)

Résoudre l'équation différentielle suivante en utilisant la transformée de Laplace

$$y''(t) + y'(t) + y(t) = \sin(t) \qquad \text{avec } y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = -1$$

1 2 3 4

Représentation par schéma-blocs

Schéma-blocs

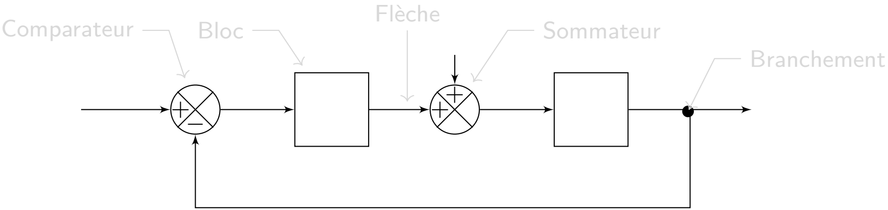


Schéma-blocs, on trouve :

- bloc = élément ou groupe d'éléments du système ;
- flèche = grandeur physique entrant ou sortant d'un élément ;
- comparateur : soustrait des grandeurs de même nature physique ;
- sommateur : ajoute des grandeurs de même nature physique ;
- branchement = prélèvement d'information analogue à un capteur parfait.

Schéma-blocs

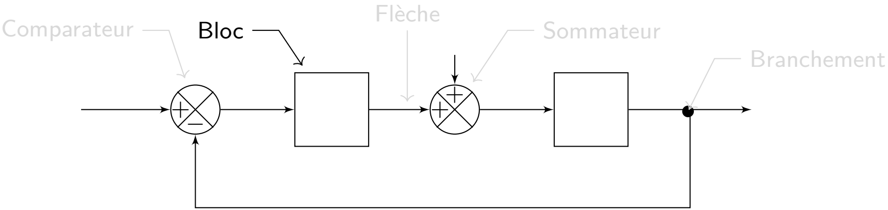


Schéma-blocs, on trouve :

- bloc = élément ou groupe d'éléments du système ;
- flèche = grandeur physique entrant ou sortant d'un élément ;
- comparateur : soustrait des grandeurs de même nature physique ;
- sommateur : ajoute des grandeurs de même nature physique ;
- branchement = prélèvement d'information analogue à un capteur parfait.

Schéma-blocs

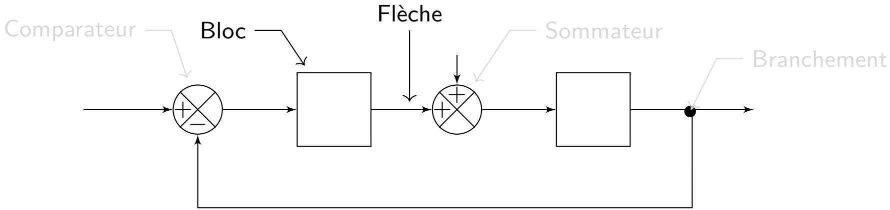


Schéma-blocs, on trouve :

- bloc = élément ou groupe d'éléments du système ;
- flèche = grandeur physique entrant ou sortant d'un élément ;
- comparateur : soustrait des grandeurs de même nature physique ;
- sommateur : ajoute des grandeurs de même nature physique ;
- branchement = prélèvement d'information analogue à un capteur parfait.

Schéma-blocs

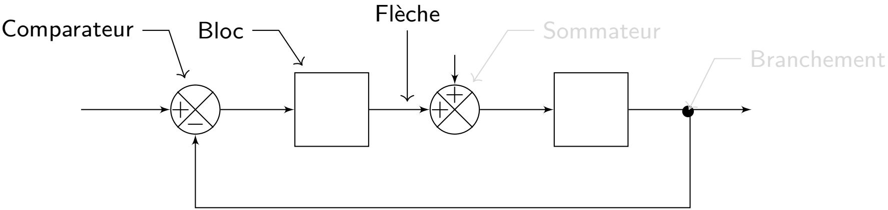


Schéma-blocs, on trouve :

- bloc = élément ou groupe d'éléments du système ;
- flèche = grandeur physique entrant ou sortant d'un élément ;
- comparateur : soustrait des grandeurs de même nature physique ;
- sommateur : ajoute des grandeurs de même nature physique ;
- branchement = prélèvement d'information analogue à un capteur parfait.

Schéma-blocs

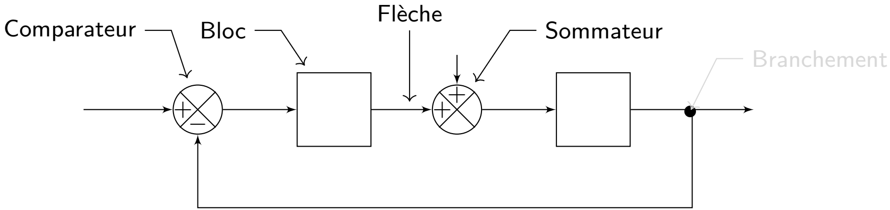


Schéma-blocs, on trouve :

- bloc = élément ou groupe d'éléments du système ;
- flèche = grandeur physique entrant ou sortant d'un élément ;
- comparateur : soustrait des grandeurs de même nature physique ;
- sommateur : ajoute des grandeurs de même nature physique ;
- branchement = prélèvement d'information analogue à un capteur parfait.

Schéma-blocs

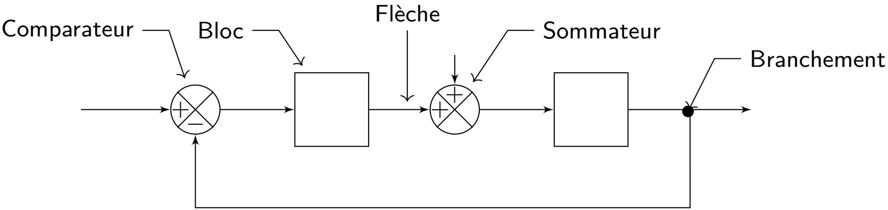
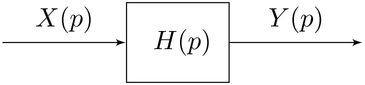


Schéma-blocs, on trouve :

- bloc = élément ou groupe d'éléments du système ;
- flèche = grandeur physique entrant ou sortant d'un élément ;
- comparateur : soustrait des grandeurs de même nature physique ;
- sommateur : ajoute des grandeurs de même nature physique ;
- branchement = prélèvement d'information analogue à un capteur parfait.

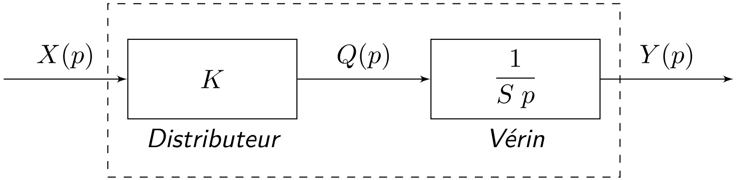
Exemple : commande de vérin hydraulique

On peut écrire la transmittance du système global {distributeur + vérin}

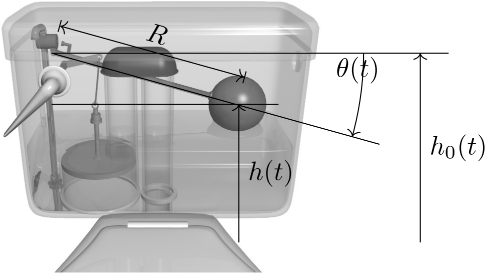


$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K}{S\,p}$$

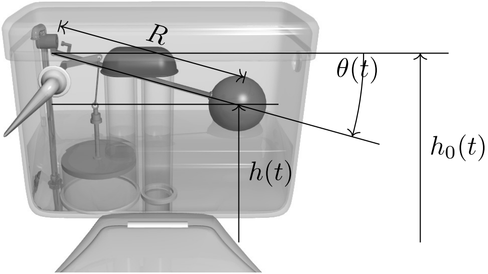
ou décomposer le système structurellement :

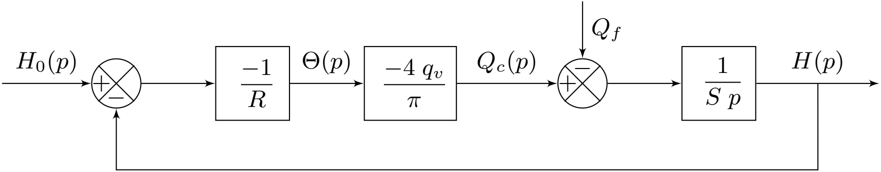


Exemple : commande de chasse d'eau



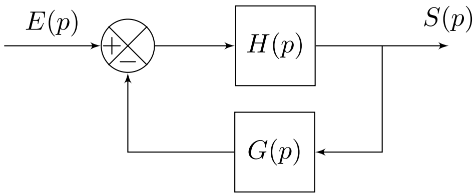
Exemple : commande de chasse d'eau





Chaîne fermée, asservissement

- Schéma-blocs d'un asservissement :

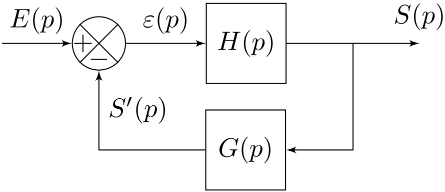


- Fonction de transfert en boucle fermée :

$$\mathrm{FTBF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H(p)}{1 + H(p)\, G(p)}$$

Chaîne fermée, asservissement

Schéma-blocs d'un asservissement :



Fonction de transfert en boucle ouverte :

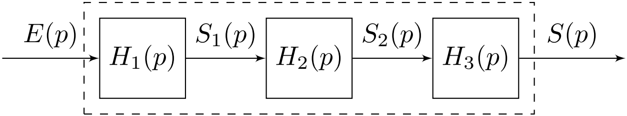
$$\mathrm{FTBO}(p) = \frac{S'(p)}{\varepsilon(p)} = H(p)\,G(p)$$

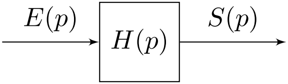
On peut alors écrire :

$$\mathrm{FTBF}(p) = \frac{H(p)}{1 + \mathrm{FTBO}(p)}$$

Propriété (Association série)

La fonction de transfert équivalente à l'association de blocs en série est égale au produit des fonctions de transfert des blocs.

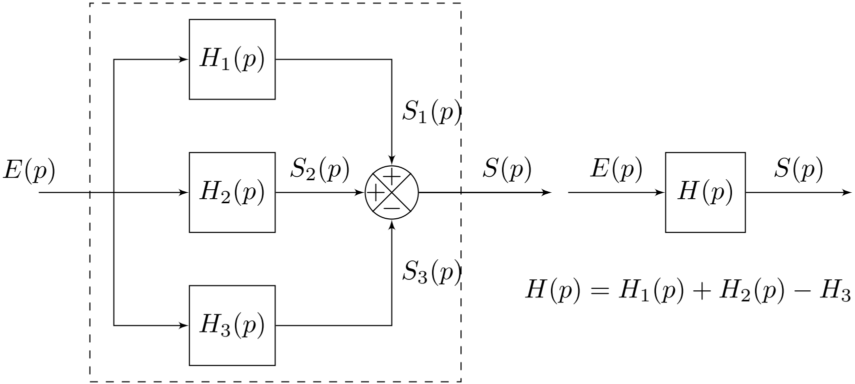




$$H(p) = H_1(p)H_2(p)H_3(p)$$

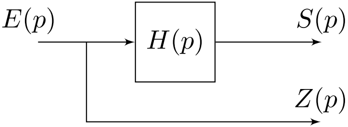
Propriété (Association parallèle)

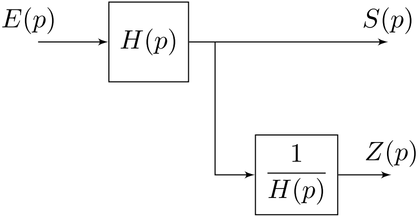
La fonction de transfert équivalente à l'association de blocs en parallèle est égale à la somme des fonctions de transfert des blocs.



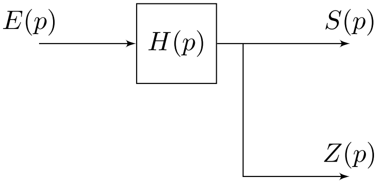
$$H(p) = H_1(p) + H_2(p) - H_3(p)$$

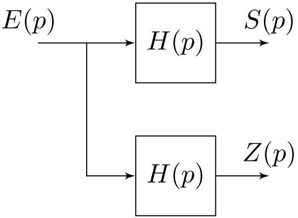
Déplacement d'un point de prélèvement



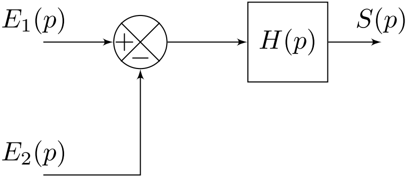


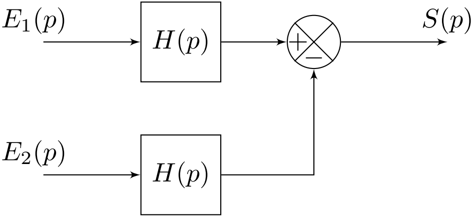
Déplacement d'un point de prélèvement



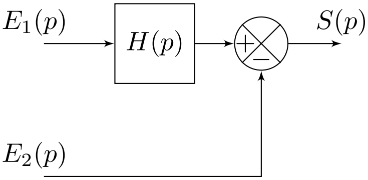


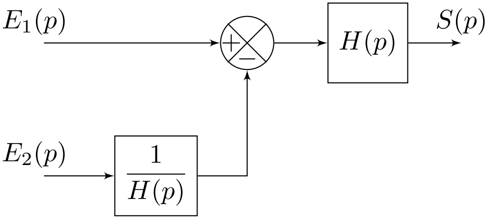
Déplacement d'un comparateur



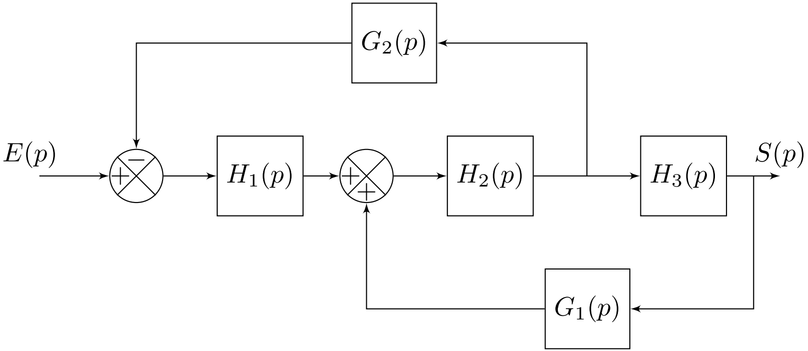


Déplacement d'un comparateur





Simplification de schéma-blocs



Simplification de schéma-blocs