Nombres complexes : introduction

Rappelons qu'on note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels (ou nombres).

On rappelle que si a est réel alors $a^2 \geq 0$, et $a^2 = 0$ si et seulement si $a = 0$.

Un nombre réel $a > 0$ a 2 racines carrées réelles : une positive noté $\sqrt{a}$, une négative qui est $-\sqrt{a}$.

Ainsi : si $a \geq 0$ alors $(\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a$ et si a et b sont réels, a positif, alors $b^2 = a$ si et seulement si $b = \sqrt{a}$ ou $b = -\sqrt{a}$.

On rappelle qu'un nombre réel $a < 0$ n'a pas de racine carrée réelle.

1 Ensemble des nombres complexes

1.1 Notion de nombre complexe

Pour palier au problème des négatifs qui n'ont pas de racine carrée réelle, on "crée" (peu importe comment) un nombre (non réel!!) i qui vérifie :

$$i^2 = -1$$

Définition 1 *Un **nombre complexe** est un nombre de la forme :*

$$z = a + ib$$

où a et b sont réels et $i^2 = -1$.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes :

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib \ \ / \ \ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

Souvent, i est noté j en physique, pour ne pas confondre avec l'intensité.
Si $z = a + ib$ avec a et b réels alors :

a est la **partie réelle** de z : $a = \mathrm{Re}(z)$ et
b est la **partie imaginaire** de z : $b = \mathrm{Im}(z)$.

Attention, la partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre RÉEL !

Un complexe donné sous la forme précédente est dit écrit sous **forme algébrique**.

On a la propriété d'identification ou d'unicité de la forme algébrique :

Propriété 1 *Si z est un complexe :*

$$z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$$

*Si $z = a + ib = c + id$ avec a, b, c, d **réels** alors $a = c = \mathrm{Re}(z)$ et $b = d = \mathrm{Im}(z)$.*

Un complexe tel que $z = \mathrm{Re}\, z$, c'est à dire $\mathrm{Im}\, z = 0$ est en fait un réel. Un complexe tel que $z = i\,\mathrm{Im}\, z$, c'est à dire $\mathrm{Re}\, z = 0$ est un **imaginaire pur**. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

1.2 Opérations algébriques

Si $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$, avec a, a', b, b' réels alors :

- $z + z' = (a + a') + i(b + b') \in \mathbb{C}$
- $z.z' = (a + ib).(a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b) = z'.z \in \mathbb{C}$

Si z et z' sont complexes alors :

$$\text{Si } z.z' = 0 \text{ alors } z = 0 \text{ ou } z' = 0$$

Les identités remarquables sont valables dans $\mathbb{C}$: si z et z' sont complexes :

$$\begin{cases} (z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2 \\ (z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2 \\ z^2 - z'^2 = (z + z')(z - z') \\ z^2 + z'^2 = (z + iz')(z - iz') \end{cases}$$

Si z, a sont complexes, n un entier :

$$z^n - a^n = (z - a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \dots a^{n-2} z + a^{n-1})$$

Tout complexe z **non nul** est inversible. Son inverse (unique) est noté z^{-1} ou $\frac{1}{z}$ ainsi :

$$z.z^{-1} = z.\frac{1}{z} = 1$$

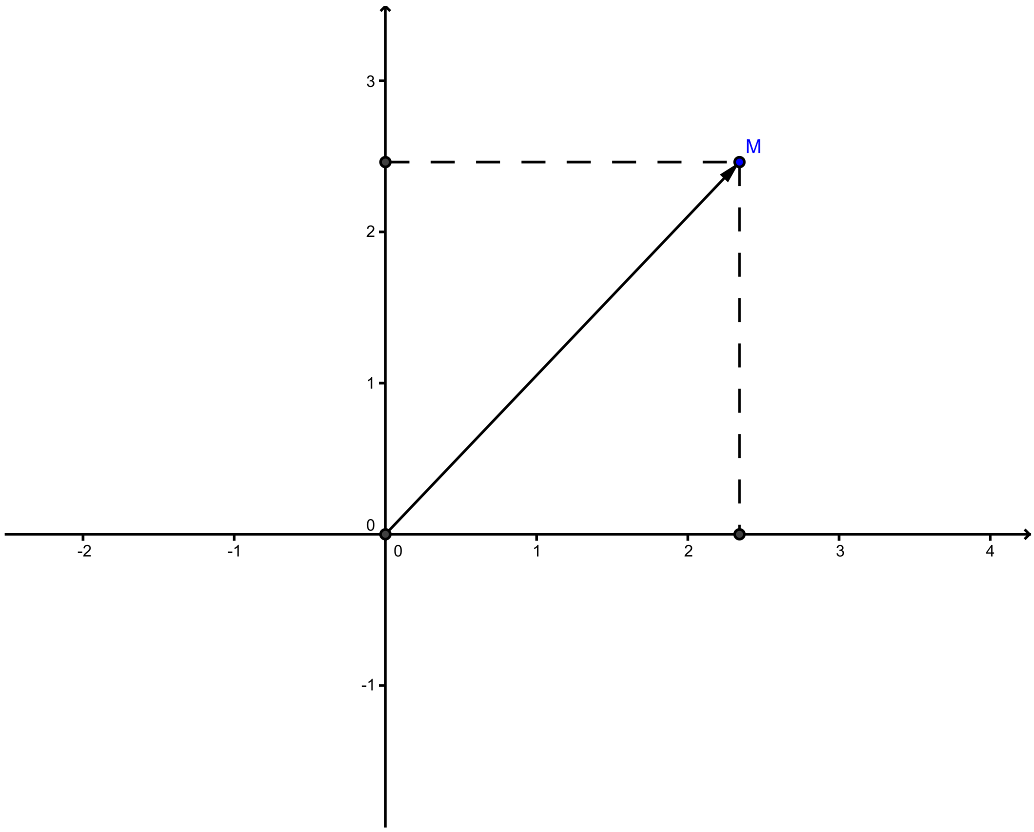
.

Si de plus $z' \neq 0$,

- $\dfrac{1}{z'} = \dfrac{1}{a' + ib'} = \dfrac{a' - ib'}{a'^2 + b'^2} = \dfrac{a'}{a'^2 + b'^2} + i\dfrac{-b'}{a'^2 + b'^2} \in \mathbb{C}$.
- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{a + ib}{a' + ib'} = \dfrac{(a + ib)(a' - ib')}{a'^2 + b'^2} = \dfrac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + i\dfrac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2} \in \mathbb{C}$.

1.3 Représentation géométrique

On muni le plan d'un repère orthonormé direct $R = (O, \vec{I}, \vec{J})$.



Définition 2 *Tout complexe $z = a + ib$ avec a et b réels, est identifié avec le point $M(z)$ de coordonnées (a, b) dans $\mathbb{R}^2$ et le vecteur $\vec{v}(z)$ de coordonnées (a, b) dans R.*

*On dit que $M(z)$ et $\vec{v}(z)$ ont pour **affixe** z.*

L'affixe d'un point A du plan est souvent notée z_A.

Souvent, on confond en pratique z, $M(z)$ et $\vec{v}(z)$ et on identifie du coup $\mathbb{C}$ sa représentation sur le plan $\mathbb{R}^2$

1.4 Quantité conjuguée, module

Définition 3 *Si $z = a + ib$ avec a et b réels est un complexe, on pose $\overline{z} = a - ib \in \mathbb{C}$. $\overline{z}$ est le **conjugué** de z.*

On a $\operatorname{Re}(\overline{z}) = \operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(\overline{z}) = -\operatorname{Im}(z)$. De plus, $\overline{(\overline{z})} = z$.

Soit z un complexe.
z est réel si et seulement si $\operatorname{Im}(z) = 0$ ou $\overline{z} = z$ ou $z = \operatorname{Re}(z)$.
z est imaginaire pur si et seulement si $\operatorname{Re}(z) = 0$ ou $\overline{z} = -z$ ou $z = i \operatorname{Im}(z)$.

On a les formules dites d'Euler :

Propriété 2

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

Si z et z' sont complexes alors :

$$\begin{array}{rrcl} & \overline{z + z'} & = & \overline{z} + \overline{z'} \\ & \overline{z.z'} & = & \overline{z}.\overline{z'} \\ \text{Si : } z' \neq 0 : & \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} & = & \dfrac{(\overline{z})}{(\overline{z'})} \end{array}$$

Définition 4 *Si $z = a + ib$ avec a et b réels alors on pose :*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}} \qquad |z|^2 = z\overline{z}$$

*$|z|$ est le **module** de z. C'est un réel positif.*

Si z et z' sont complexes alors :

$$\begin{array}{rcl} |z.z'| & = & |z|\,.\,|z'| \\ \left|\dfrac{z}{z'}\right| & = & \dfrac{|z|}{|z'|} \\ |\overline{z}| & = & |z| \end{array}$$

1.5 Cercle trigonométrique

Définition 5 *Si $\theta \in \mathbb{R}$, on pose :*

$$e^{i\theta} = \exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

$e^{i\theta}$ est l' ***exponentielle complexe*** *de $i\theta$*

En particulier : $e^0 = e^{2i\pi} = 1$, plus généralement, l'application $\theta \to e^{i\theta}$ est 2π-périodique.

Si θ est un réel alors (d'après le théorème de Pythagore) $|e^{i\theta}| = 1$. Réciproquement, si z est un complexe avec $|z| = 1$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \exp(i\theta)$. On a donc :

Propriété 3 *On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.*

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\} = \{z = a + ib / a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1\}$$

Si z est un complexe non nul. $\left|\frac{z}{|z|}\right| = 1$, $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$.

On a les formules dites d'Euler, de Moivre.

Propriété 4 *Si θ, θ' sont des réels et n est un entier :*

$$\exp\left(i(\theta + \theta')\right) = \exp\left(i\theta\right).\exp\left(i\theta'\right), \quad \exp\left(in\theta\right) = \left(\exp\left(i\theta\right)\right)^n$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}, \quad \left|e^{i\theta}\right| = 1$$

Si $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\cos(n\theta) = \mathrm{Re}((e^{i\theta})^n) \quad ; \quad \sin(n\theta) = \mathrm{Im}((e^{i\theta})^n)$$

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$$

Propriété 5 *Si $z \in \mathbb{C}$ a pour image $M(z)$ et $\vec{v}(z)$ alors*

$$|z| = \underbrace{d(O, M(z))}_{\text{distance entre } O \text{ et } M(z)} = \|\vec{v}(z)\|$$

Si A et B sont des points du plan alors : $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ et :

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$$

Propriété 6 (Inégalité triangulaire) *Si z et z' sont 2 complexes alors :*

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

1.6 Arguments d'un complexe, forme trigonométrique.

Soit z un complexe non nul, on peut écrire : $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Plus précisément :

$$z = |z|\frac{z}{|z|}$$

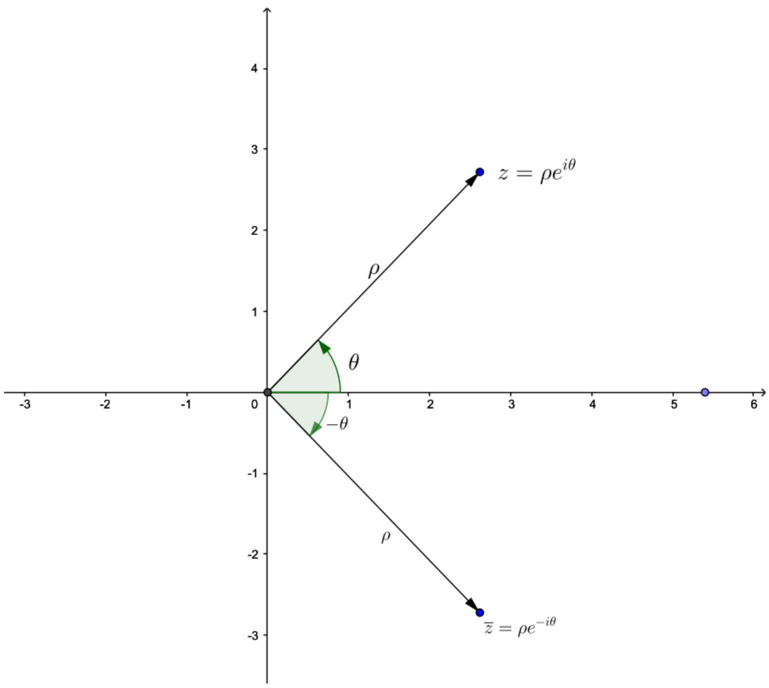
avec $|z| \in \mathbb{R}_+^*$ et $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$.

Définition 6 *Si on écrit :*

$$z = \rho e^{i\theta}$$

*avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ alors on dit qu'on a écrit $z \in \mathbb{C}^*$ sous forme **trigonométrique** ou **exponentielle**. On a $\rho = |z|$: ρ est le module de z et on dit que θ est **un argument** de z.*

Pour trouver l'écriture trigonométrique ou exponentielle d'un complexe, on calcule $|z|$ et on "trouve" $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = \exp(i\theta)$.



En particulier, $e^{i\theta}$ a pour argument θ et pour module 1.

Propriété 7 *Si $z = \rho e^{i\theta} = \rho' e^{\theta'}$ avec ρ et ρ' dans $\mathbb{R}_+^*$ et θ, θ' dans $\mathbb{R}$ alors :*
$\rho = \rho'$ et $\theta = \theta'$ à 2π près.

En combinant les formules précédentes, on obtient, si z et z' sont 2 complexes non nuls, k est un entier relatif :

- Si z a pour argument θ, z' a pour argument θ' alors $z * z'$ a pour argument $\theta + \theta'$.
- Si z a pour argument θ, z' a pour argument θ' alors $\frac{z}{z'}$ a pour argument $\theta - \theta'$.
- Si z a pour argument θ, z^k a pour argument $k\theta$.

2 Équations polynomiales

2.1 Racines carrées complexes d'un réel

Un nombre réel $a > 0$ a 2 racines carrées complexes : une réelle positive noté $\sqrt{a}$, une réelle négative qui est $-\sqrt{a}$.

Un nombre réel $a < 0$ a 2 racines carrées complexes : $i\sqrt{|a|}$, $-i\sqrt{|a|}$.

2.2 Équation réelle du second degré.

On considère maintenant a, b, c des réels avec $a \neq 0$ et l'équation d'inconnue z éventuellement complexe :

$$az^2 + bz + c = 0$$

Son **discriminant** est $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$.

Théorème 1
- *Si $\Delta > 0$, l'équation précédente a 2 solutions réelles et 2 seulement (pas d'autre solution éventuellement complexe) qui sont les nombres :*

$$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- *Si $\Delta = 0$, l'équation précédente a 1 solution réelle et une seule (dite **solution double**) (pas d'autre solution éventuellement complexe) qui est le nombre :*

$$\frac{-b}{2a}$$

- *Si $\Delta < 0$, l'équation précédente a 2 solutions complexes et 2 seulement (pas de solution réelle), qui sont conjuguées et qui sont les nombres :*

$$\frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad ; \quad \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Si on note α et β sont les racines ($\alpha = \beta$ dans le cas de la solution double) de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, on a :

- $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

- $\alpha.\beta = \frac{c}{a}$

- pour tout $z \in \mathbb{C}$: $az^2 + bz + c = a(z - \alpha)(z - \beta)$

Dans le dernier cas, on dit qu'on a factorisé l'expression (ou le **polynôme**) $az^2 + bz + c$ par $(z - \alpha)$ et $(z - \beta)$.