Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 6 Septembre 2024.

Nombres complexes pour les non experts.

Exercice 1

Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes (x, y, x', y', a, b, a', b' sont réels) :
• $(2+3i)+(-1+6i)$ • $(5+i)-(3-2i)$ • $(1+i)(3-2i)$ • $(4+i)(-5+3i)$
• $(2-i)^2$ • $(x+iy)(x'+iy')$ • $(x+iy)^2$ • $(2-3i)(2+3i)$ • $(a+ib)(a-ib)$

Exercice 2

Déterminer les parties réelles et imaginaires des complexes :

$$\frac{1}{i} \quad , \quad i^3 \quad , \quad i^4 \quad , \quad (3-i)^2 \quad , \quad \frac{3(2+i)}{1-i} \quad , \quad \frac{2+i}{1+2i}$$

Exercice 3

Déterminer les modules de

$$1+i \quad , \quad 2+i \quad , \quad \frac{1}{i} \quad , \quad 5i \quad , \quad -3i \quad , \quad 3-2i \quad , \quad \frac{2-i}{i-3} \quad , \quad (2+i)(i-1) \quad , \quad (1+i)^3$$

Exercice 4

Mettre sous la forme $a+ib$ ($a,b\in\mathbb{R}$) les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2+\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 5

On considère dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixe $z_A=3+i$, $z_B=2-2i$, $z_C=2i$ et $z_D=1+5i$.

1. Faire une figure
2. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 6

Déterminer les formes trigonométriques des nombres suivants ainsi que celles de leurs inverses et de leurs conjugués :

1. 12
2. -8
3. $\sqrt{3}i$
4. $-2i$
5. $5-5i$
6. $-5+5i\sqrt{3}$

Exercice 7

Soit $j=\exp(2i\pi/3)$.
Déterminer sous formes algébriques et trigonométriques : j^2, j^3, j^2+j+1, $\frac{1}{j}$, $\overline{j}$.
Représenter ces divers nombres sur le plan complexe.

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2+z+1=0 \quad ; \quad 4z^2-2z+1=0$$

Exercice 9

Soit $z_1=1+i$ et $z_2=\sqrt{3}-i$.

1. Calculer les modules et arguments de z_1, z_2 et z_1z_2.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.