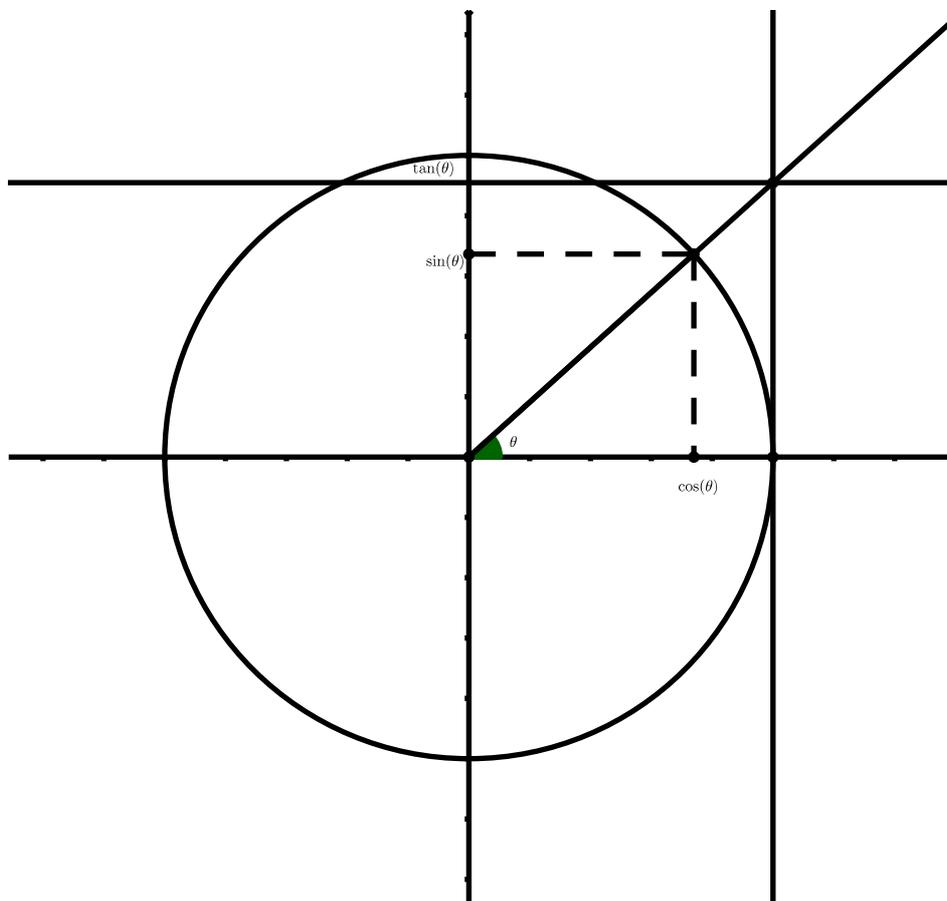


Chapitre 2 : Nombres complexes, trigonométrie

Plan

1	Un peu de trigonométrie	2
2	Ensemble des nombres complexes	4
2.1	Notion de nombre complexe	4
2.2	Représentation géométrique	5
2.3	Opérations algébriques	5
2.4	Quantité conjuguée, module	6
2.5	Cercle trigonométrique	7
2.6	Arguments d'un complexe	8
2.7	Quelques transformations du plan	10
2.8	Une factorisation utile	10
3	Exponentielle complexe	10
4	Équation du second degré	11
4.1	Racines complexes d'un réel.	11
4.2	Racines d'un complexe	11
4.3	Rappel sur l'équation réelle	12
4.4	Équation complexe	12
5	Équations polynomiales	13
6	Racines n-ièmes	14

1 Un peu de trigonométrie



On pose pour a tel que $\cos(a) \neq 0$:

$$\tan(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$$

À connaître, les valeurs classiques :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	NS

Formules de Pythagore Si θ est un réel :

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Pour θ tel que $\cos(\theta) \neq 0$:

$$\tan^2(\theta) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$$

Formules de translations, symétries Pour tout x réel tel que les termes existent :

$$\begin{aligned} \sin(x + 2\pi) &= \sin(x) & ; & & \cos(x + 2\pi) &= \cos(x) & ; & & \tan(x + 2\pi) &= \tan(x) \\ \sin(x + \pi) &= -\sin(x) & ; & & \cos(x + \pi) &= -\cos(x) & ; & & \tan(x + \pi) &= \tan(x) \\ \sin(\pi - x) &= \sin(x) & ; & & \cos(\pi - x) &= -\cos(x) & ; & & \tan(\pi - x) &= -\tan(x) \\ \sin(x + \frac{\pi}{2}) &= \cos(x) & ; & & \cos(x + \frac{\pi}{2}) &= -\sin(x) & ; & & \tan(x + \frac{\pi}{2}) &= -\frac{1}{\tan(x)} \\ \sin(\frac{\pi}{2} - x) &= \cos(x) & ; & & \cos(\frac{\pi}{2} - x) &= \sin(x) & ; & & \tan(\frac{\pi}{2} - x) &= \frac{1}{\tan(x)} \\ \sin(-x) &= -\sin(x) & ; & & \cos(-x) &= \cos(x) & ; & & \tan(-x) &= -\tan(x) \end{aligned}$$

Formules d'addition Si a et b sont réels.

$$\begin{cases} \sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b) \\ \sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b) \\ \cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \\ \cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \\ \sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a) \\ \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - 2 \sin^2(a) \end{cases}$$

Quand les termes existent :

$$\begin{cases} \tan(2a) = \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan^2(a)} \\ \tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(b)} \\ \tan^2(a) + 1 = \frac{1}{\cos^2(a)} \end{cases}$$

Formules de linéarisation

$$\begin{cases} \sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b)) \\ \cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b)) \\ \sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a + b) + \sin(a - b)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \\ \sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2} \\ \sin(a) \cos(a) = \frac{\sin(2a)}{2} \end{cases}$$

Formules de factorisation

$$\begin{cases} \sin(a) + \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin(a) - \sin(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \cos(a) - \cos(b) = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \end{cases}$$

Formules concernant tan Quand les termes sont définis :

$$\begin{cases} \tan(2a) = \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan^2(a)} \\ \sin(2a) = \frac{2 \tan(a)}{1 + \tan^2(a)} \\ \cos(2a) = \frac{1 - \tan^2(a)}{1 + \tan^2(a)} \end{cases}$$

2 Ensemble des nombres complexes

Rappelons qu'on note \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels (ou nombres).

2.1 Notion de nombre complexe

Définition 1 Un *nombre complexe* est un nombre de la forme :

$$z = a + ib$$

où a et b sont réels et $i^2 = -1$.

On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes :

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

Souvent, i est noté j en physique, pour ne pas confondre avec l'intensité. Cette notation est réservée en mathématiques au nombre $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Si $z = a + ib$ avec a et b réels alors :

a est la **partie réelle** de z : $a = \operatorname{Re}(z)$ et

b est la **partie imaginaire** de z : $b = \operatorname{Im}(z)$.

Attention, la partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre RÉEL !

Propriété 1 (Identification des parties réelles et imaginaires) Si z est un complexe :

$$z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$$

Si $z = a + ib = c + id$ avec a, b, c, d **réels** alors $a = c = \operatorname{Re}(z)$ et $b = d = \operatorname{Im}(z)$.

Un complexe donné sous la forme précédente est dit écrit sous **forme algébrique**.

Un complexe tel que $z = \operatorname{Re} z$, c'est à dire $\operatorname{Im} z = 0$ est en fait un réel. Un complexe tel que $z = i \operatorname{Im} z$, c'est à dire $\operatorname{Re} z = 0$ est en fait un **imaginaire pur**. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

2.2 Représentation géométrique

On muni le plan d'un repère orthonormé direct $R = (O, \vec{I}, \vec{J})$.

Définition 2 Tout complexe $z = a + ib$ avec a et b réels, est identifié avec le point $M(z)$ de coordonnées (a, b) dans R et le vecteur $\vec{v}(z)$ de coordonnées (a, b) dans R .

On dit que $M(z)$ et $\vec{v}(z)$ ont pour **affixe** z .

L'affixe d'un point A du plan est souvent notée z_A .

Souvent, on confond en pratique z , $M(z)$ et $\vec{v}(z)$ et on identifie du coup \mathbb{C} et le plan \mathbb{R}^2

2.3 Opérations algébriques

Si $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$, avec a, a', b, b' réels alors :

- $z + z' = (a + a') + i(b + b') \in \mathbb{C}$
- $z \cdot z' = (a + ib)(a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b) \in \mathbb{C}$.

Si de plus $z' \neq 0$, (technique dite de la quantité **conjuguée**) :

- $\frac{1}{z'} = \frac{1}{a' + ib'} = \frac{a' - ib'}{a'^2 + b'^2} = \frac{a'}{a'^2 + b'^2} + i \frac{-b'}{a'^2 + b'^2} \in \mathbb{C}$.
- $\frac{z}{z'} = \frac{a + ib}{a' + ib'} = \frac{(a + ib)(a' - ib')}{a'^2 + b'^2} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + i \frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2} \in \mathbb{C}$.

Notons que tout complexe non nul a un inverse.

On dira que \mathbb{C} (muni des opérations $+$ et $*$) est un **corps**.

On rappelle dans ce cadre 2 formules fondamentales : la formule du binôme et la formule de la série géométrique :

Théorème 1 Si a et b sont des complexes et n est un entier naturel non nul :

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{1}ab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

En particulier, si $x \neq 1$ est un complexe :

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + \dots + x^{n-1} + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

2.4 Quantité conjuguée, module

Définition 3 Si $z = a + ib$ avec a et b réels est un complexe, on pose $\bar{z} = a - ib \in \mathbb{C}$. \bar{z} est le **conjugué** de z .

On a $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$. De plus, $\overline{\bar{z}} = z$.

Soit z un complexe.

z est réel si et seulement si $\operatorname{Im}(z) = 0$ ou $\bar{z} = z$ ou $z = \operatorname{Re}(z)$.

z est imaginaire pur si et seulement si $\operatorname{Re}(z) = 0$ ou $\bar{z} = -z$ ou $z = i \operatorname{Im}(z)$.

On a les formules dites d'Euler :

Propriété 2

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Si z et z' sont complexes alors :

$$\begin{aligned} \overline{z + z'} &= \bar{z} + \bar{z}' \\ \overline{z \cdot z'} &= \bar{z} \cdot \bar{z}' \\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} &= \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad \text{Si } z' \neq 0 \end{aligned}$$

Définition 4 Si $z = a + ib$ avec a et b réels alors on pose :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}} \quad |z|^2 = z\bar{z}$$

$|z|$ est le **module** de z . C'est un réel positif.

Si z et z' sont complexes alors :

$$\begin{aligned} |z \cdot z'| &= |z| \cdot |z'| \\ \left|\frac{z}{z'}\right| &= \frac{|z|}{|z'|} \\ |\bar{z}| &= |z| \end{aligned}$$

2.5 Cercle trigonométrique

Définition 5 Si $\theta \in \mathbb{R}$, on pose :

$$e^{i\theta} = \exp(i\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

$e^{i\theta}$ est l' **exponentielle complexe** de $i\theta$

En particulier : $e^0 = e^{2i\pi} = 1$, plus généralement, l'application $\theta \rightarrow e^{i\theta}$ est 2π -périodique.

Si θ est un réel alors (d'après le théorème de Pythagore) $|e^{i\theta}| = 1$. Réciproquement, si z est un complexe avec $|z| = 1$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \exp(i\theta)$. On a donc :

Propriété 3 On note \mathbb{U} l'ensemble des complexes de module 1.

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\} = \{z = a + ib / a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1\}$$

On aura tendance à appeler \mathbb{U} cercle trigonométrique...

On a les formules dites d'Euler, de Moivre.

Propriété 4 Si θ, θ' sont des réels et n est un entier :

$$\begin{aligned} \exp(i(\theta + \theta')) &= \exp(i\theta) \cdot \exp(i\theta'), & \exp(in\theta) &= (\exp(i\theta))^n \\ \overline{e^{i\theta}} &= e^{-i\theta}, & |e^{i\theta}| &= 1 \end{aligned}$$

Si $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\theta) = \operatorname{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \operatorname{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

On en déduit que si $z \in \mathbb{U}$, $z' \in \mathbb{U}$ alors $z \cdot z' \in \mathbb{U}$ et $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$. On dira que \mathbb{U} est un **groupe multiplicatif**.

On a aussi, si θ, p, q sont réels.

$$\begin{aligned} 1 + e^{i\theta} &= 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} \\ 1 - e^{i\theta} &= -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} \\ e^{ip} + e^{iq} &= 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}} \\ e^{ip} - e^{iq} &= 2i \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}} \end{aligned}$$

Notons que si $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ sont fixés :

- $\{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| = r\}$ définit le **cercle** de centre z_0 et de rayon r .
- $\{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| \leq r\}$ définit le **disque** de centre z_0 et de rayon r .

Propriété 5 Si $z \in \mathbb{C}$ a pour image $M(z)$ et $\vec{v}(z)$ alors

$$|z| = \underbrace{d(O, M(z))}_{\text{distance entre } O \text{ et } M(z)} = \|\vec{v}(z)\|$$

Si A et B sont des points du plan alors : \overrightarrow{AB} a pour affixe $z_B - z_A$ et :

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$$

Le milieu I du segment $[A, B]$ a pour affixe :

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Dit autrement, z_I est la moyenne de z_A et z_B et si z et a sont 2 complexes, $|z - a|$ est la distance vue sur le plan entre z et a .

Propriété 6 (Inégalité triangulaire) Si z et z' sont 2 complexes alors :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

2.6 Arguments d'un complexe

On dit que a et b sont **congrus modulo 2π** ou **égaux modulo 2π** quand il existe k entier relatif tel que : $a = b + k.2\pi$ et on note alors :

$$a \equiv b [2\pi]$$

On a les règles de calcul suivantes.

Si a, b, c, d sont des réels et k un entier relatif :

- Si $\begin{cases} a \equiv b [2\pi] \text{ et} \\ c \equiv d [2\pi] \end{cases}$ alors : $a + c \equiv b + d [2\pi]$
- Si $a \equiv b [2\pi]$ alors : $-a \equiv -b [2\pi]$
- Si $a \equiv b [2\pi]$ alors : $k.a \equiv k.b [2\pi]$

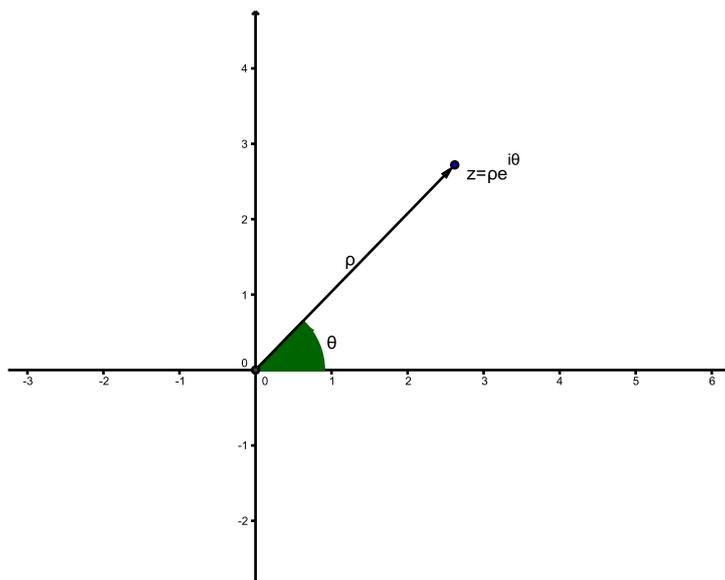
Dit autrement, les égalités modulo s'additionnent et se multiplient par des entiers relatifs. Attention, elles se divisent très mal.

Soit z un complexe non nul, on peut écrire : $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Définition 6 Si on écrit :

$$z = \rho e^{i\theta}$$

avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ alors on dit qu'on a écrit $z \in \mathbb{C}^*$ sous forme **trigonométrique** ou **exponentielle**. On a $\rho = |z|$: ρ est le module de z et on dit que θ est un **argument** de z .



En particulier, $e^{i\theta}$ a pour argument θ et pour module 1.

Propriété 7 Si $z = \rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'}$ avec ρ et ρ' dans \mathbb{R}_+^* et θ, θ' dans \mathbb{R} alors :
 $\rho = \rho'$ et $\theta = \theta'$ à 2π près. On note :

$$\theta \equiv \theta' \quad [2\pi]$$

En combinant les formules précédentes, on obtient, si z et z' sont 2 complexes non nuls :

- Si z a pour argument θ , z' a pour argument θ' alors $z * z'$ a pour argument $\theta + \theta'$.
- Si z a pour argument θ , z' a pour argument θ' alors $\frac{z}{z'}$ a pour argument $\theta - \theta'$.

Dans toutes ces relations k est un entier relatif.

Pour finir sur l'argument :

Si a, b, c sont des complexes distincts d'images respectives A, B, C dans le plan : l'angle \widehat{ACB} est un argument du complexe : $\frac{b-c}{a-c}$.

Propriété 8 Si z et z' sont non nuls et si $|z + z'| = |z| + |z'|$ alors z et z' ont un même argument.

2.7 Quelques transformations du plan

Soit b un complexe fixé et a un complexe non nul fixé qu'on représente sous forme trigonométrique $a = \rho e^{i\theta}$ ($\rho \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$).

- La transformation $z \rightarrow \bar{z}$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe réel
- La transformation du plan complexe $z \rightarrow z + b$ est la translation du vecteur d'affixe b .
- Dans le cas où $\rho = 1$, la transformation $z \rightarrow a.z = e^{i\theta}.z$ est la rotation d'angle θ de centre O .
- Dans le cas où $\theta = 0$, la transformation $z \rightarrow a.z = \rho.z$ est l'homothétie de rapport ρ de centre O .
- La transformation du plan complexe $z \rightarrow a.z + b$ est une similitude directe de rapport ρ c'est à dire la composée d'une rotation, d'une homothétie de rapport ρ et d'une translation. C'est en particulier une transformation qui préserve les angles orientés et qui multiplie les longueurs par ρ .

2.8 Une factorisation utile

On considère $a > 0$ (le calcul est à adapter sinon) et b un réel et le "signal" $a \cos(t) + b \sin(t)$ ($t \in \mathbb{R}$). On fait le calcul :

$$\begin{aligned} a \cos(t) + b \sin(t) &= \operatorname{Re}(ae^{it} - ibe^{it}) \\ &= \operatorname{Re}(e^{it}(a - bi)) \end{aligned}$$

On écrit $a - ib$ sous forme trigonométrique : $a - ib = Ae^{-i\phi}$ où $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ pour conclure :

$$\begin{aligned} a \cos(t) + b \sin(t) &= \operatorname{Re}(e^{it}Ae^{-i\phi}) \\ &= \operatorname{Re}(Ae^{i(t-\phi)}) \\ a \cos(t) + b \sin(t) &= A \cos(t - \phi) \end{aligned}$$

Autrement dit la somme des 2 signaux $a \cos(t)$ et $b \sin(t)$ est un signal sinusoïdal d'amplitude A .

3 Exponentielle complexe

Définition 7 Si $z = x + iy$ avec x et y réel, alors, on pose :

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

Autrement dit :

$$\exp(z) = e^z = e^{\operatorname{Re}(z)+i\operatorname{Im}(z)} = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i\operatorname{Im}(z)} = e^{\operatorname{Re}(z)} (\cos(\operatorname{Im}(z)) + i \sin(\operatorname{Im}(z)))$$

Le nombre $\exp(z) = e^z$ est l'**exponentielle** (complexe) du nombre z .

Propriété 9 Si z et z' sont des complexes alors :

$$\exp(z + z') = e^{z+z'} = e^z e^{z'} = \exp(z) \cdot \exp(z') \quad (\exp(z))^{-1} = \frac{1}{e^z} = \exp(-z)$$

$$|\exp(z)| = e^{\operatorname{Re}(z)}.$$

$\operatorname{Im}(z)$ est un argument de e^z .

Si n est un entier : $\exp(nz) = \exp(z)^n$.

Si z et z' sont complexes alors $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z' = z + 2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Si $a = \rho e^{i\theta}$ est un complexe non nul écrit sous forme trigonométrique alors :

$$\exp(z) = a = \rho e^{i\theta} \text{ si et seulement si } z = \ln(\rho) + i(\theta + 2k\pi) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

4 Équation du second degré

4.1 Racines complexes d'un réel.

Rappelons que si $a > 0$:

a a 2 racines réelles et complexes, les nombres \sqrt{a} , $-\sqrt{a}$:

$$(\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a$$

$-a$ n'a pas de racines réelle. Il a 2 racines carrées complexes, les nombres $i\sqrt{a}$, $-i\sqrt{a}$:

$$(i\sqrt{a})^2 = (-i\sqrt{a})^2 = -a$$

4.2 Racines d'un complexe

On considère $\lambda = \rho e^{i\theta}$ un complexe non nul écrit sous forme trigonométrique ($\rho \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$) et l'équation d'inconnue z complexe :

$$z^2 = \lambda = \rho e^{i\theta}$$

Propriété 10 L'équation précédente a 2 solutions complexes qui sont les nombres :

$$\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}} \quad ; \quad -\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

c'est à dire les nombres :

$$\sqrt{\rho} \exp\left(i\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad -\sqrt{\rho} \exp\left(i\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

Ces nombres s'appellent les **racines carrées complexes** de λ .

On peut aussi chercher ces racines sous forme algébrique en posant $z = a + ib$ a et b réels et en écrivant les relations :

$$\begin{cases} z^2 = (a^2 - b^2) - 2iab = \lambda \\ |z|^2 = a^2 + b^2 = |\lambda| \end{cases}$$

Attention, la notation \sqrt{x} est exclusivement réservée au cas où x est un **réel positif**.

4.3 Rappel sur l'équation réelle

On considère maintenant a, b, c des réels avec $a \neq 0$ et l'équation d'inconnue z éventuellement complexe :

$$az^2 + bz + c = 0$$

Son **discriminant** est $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$.

Théorème 2 • Si $\Delta > 0$, l'équation précédente a 2 solutions réelles et 2 seulement (pas d'autre solution éventuellement complexe) qui sont les nombres :

$$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} ; \quad \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation précédente a 1 solution réelle et une seule (dite **solution double**) (pas d'autre solution éventuellement complexe) qui est le nombre :

$$\frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation précédente a 2 solutions complexes et 2 seulement (pas de solution réelle), qui sont conjuguées et qui sont les nombres :

$$\frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} ; \quad \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

4.4 Équation complexe

On considère maintenant a, b, c des complexes avec $a \neq 0$ et l'équation d'inconnue z complexe :

$$az^2 + bz + c = 0$$

Son **discriminant** est $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$.

Théorème 3 • Si $\Delta \neq 0$, l'équation précédente a 2 solutions complexes qui sont les nombres :

$$\frac{-b - \delta}{2a} ; \quad \frac{-b + \delta}{2a}$$

où δ est une des racines carrées complexes de Δ , c'est à dire : $\delta^2 = \Delta$.

- Si $\Delta = 0$, l'équation précédente a 1 solution complexe (dite **solution double**) qui est le nombre :

$$\frac{-b}{2a}$$

Si on note α et β les racines ($\alpha = \beta$ dans le cas de la racine dite double) de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, on a :

- $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

- $\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$

- pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$az^2 + bz + c = a(z - \alpha)(z - \beta)$$

Dans le dernier cas, on dit qu'on a factorisé l'expression (ou le **polynôme**) $az^2 + bz + c$ par $(z - \alpha)$ et $(z - \beta)$.

Une application classique :

Théorème 4 Soit s et p 2 complexes fixés.

Les complexes α et β sont solutions du problème, dit **problème à la somme et au produit** :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = s \\ \alpha \cdot \beta = p \end{cases}$$

si et seulement on a

$$\{\alpha, \beta\} = \{\text{Racines complexes du trinôme } z^2 - sz + p\}$$

Rappelons que, dans ce cas, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $(z - \alpha) \cdot (z - \beta) = z^2 - sz + p$.

Le problème à la somme et au produit a donc 2 couples solutions quand $s^4 \neq 4p$, un seul quand $s^2 = 4p$.

5 Équations polynomiales

On considère maintenant a, b, c, d des complexes avec $a \neq 0$ et l'équation d'inconnue z éventuellement complexe :

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

Théorème 5 Si α complexe est une racine de l'équation alors on peut factoriser l'expression (ou polynôme) $az^3 + bz^2 + cz + d$ par $(z - \alpha)$.

Autrement il existe A, B, C complexes tel que, pour tout z complexe :

$$az^3 + bz^2 + cz + d = a(z - \alpha)(z^2 + Bz + C)$$

Ainsi les racines de l'équation $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ sont les racines de $z^2 + Bz + C = 0$ complétées par α .

En degré n : si z, a sont complexes, n un entier :

$$z^n - a^n = (z - a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2z^{n-3} + \dots + a^{n-2}z + a^{n-1})$$

Ici a est racine du polynôme : $z^n - a^n$.

Plus généralement, si P est un polynôme de degré n et α est une racine de $P : P(\alpha) = 0$ alors P est factorisable par $(z - \alpha) : P(z) = (z - \alpha)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré $n - 1$.

Ainsi on montre que le nombre de solution d'une équation polynomiale est majoré par le degré de l'équation.

6 Racines n -ièmes

n est un entier non nul fixé.

On considère l'équation d'inconnue z complexe suivante : $z^n = 1$.

Théorème 6 *L'équation $z^n = 1$ a n solutions distinctes, les n nombres complexes suivants :*

$$Z_0 = 1, Z_1 = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right), Z_2 = \exp\left(\frac{4i\pi}{n}\right), \dots, Z_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right), \dots, Z_{n-1} = \exp\left(\frac{2i(n-1)\pi}{n}\right)$$

Autrement dit les nombres n nombres complexes de module 1 et d'arguments respectifs :

$$0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{2k\pi}{n}, \dots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

*Ces nombres s'appellent les **racines** n -ièmes de l'unité.*

On note \mathbb{U}_n les n racines n -ièmes de l'unité :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \ / \ k = 0 \dots n-1 \right\}$$

À noter que le produit de 2 racines n -ièmes de l'unité est une racine n -ième de l'unité et l'inverse d'une racine n -ième de l'unité en est encore une. On dira que \mathbb{U}_n est un **groupe multiplicatif**.

Attention, les notations \sqrt{x} et $\sqrt[n]{x}$ sont exclusivement réservées au cas où x est un **réel positif**. Pour rappel, dans ce cas, $\sqrt[n]{x}$ est l'unique réel positif tel que $(\sqrt[n]{x})^n = x$.

On considère maintenant l'équation (E_a) d'inconnue z complexe suivante :

$$z^n = a$$

où a est un nombre complexe non nul fixé.

On écrit a sous forme trigonométrique : $a = \rho \exp(i\alpha)$ où $\rho \in \mathbb{R}_+^*$.

On constate alors que l'équation (E_a) a une racine "évidente" $z_0 = \sqrt[n]{\rho} \exp\left(i\frac{\alpha}{n}\right)$.

On peut alors se ramener à l'équation $\left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1$ et obtenir :

Propriété 11 *Les racines de l'équation (E_a) sont obtenues en multipliant la racine "évidente" $z_0 = \sqrt[n]{\rho} \exp\left(i\frac{\alpha}{n}\right)$ par les n racines n -ièmes de l'unité. L'équation (E_a) a donc n racines.
Dit autrement :*

$$z^n = a \text{ si et seulement si } z \in \{z_0 \cdot u_k / u_k \in \mathbb{U}_n\}$$

Savoirs et savoirs faire indispensables

Savoirs

Formules de trigonométrie diverses. Formules sur les nombres complexes : Moivre, Euler, Formule du binôme...

Exponentielle complexes et formules associées.

Racines n -ièmes de l'unité.

Savoir-faire

Application des nombres complexes : linéarisation, factorisation d'expression trigonométriques (entre autres ...).

Savoir résoudre une équation du second degré dans \mathbb{C} ; une équation $z^n = a$.

Factorisation d'une expression de degré 3 dans \mathbb{C} avec une racine connue.