Fiche 5 : Td du 12-09.

Exercice 1

Définissons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$.

1. Démontrer que pour tout $n \geq 3$, u_n est positif. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Définissons maintenant la suite $v_n = u_n - 2n + 6$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En déduire une formule pour u_n et une formule pour la quantité $u_0 + u_1 + ... + u_n$ en fonction de l'entier n.

Exercice 2

On pose si $n \in \mathbb{N}$:

$$A = \sum_{k=0}^{n} 2^{2k}\binom{n}{2k} \quad ; \quad B = \sum_{k=0}^{n} 2^{2k}\binom{n}{2k+1}$$

Déterminer $A + 2B$ et $A - 2B$ et en déduire les valeurs de A et B.
On rappelle que si $p > n$ sont des entiers naturels $\binom{n}{p} = 0$.

Exercice 3

Soit $a \in]0, \pi/2[$, et définissons une suite réelle par $u_0 = 2\cos(a)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 2\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)$.

Exercice 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}$; montrer que pour tout entier $k \geq 1$ on a
$$n^k + kn^{k-1} \leq (n+1)^k.$$
2. Soit b un réel positif ou nul. Montrer par récurrence, que pour tout $n \geq 1$ on a
$$(1+b)^n \leq 1 + \frac{nb}{1!} + \frac{(nb)^2}{2!} + ... + \frac{(nb)^n}{n!}.$$

Exercice 5

On considère la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $F_0 = 0$, $F_1 = 1$
Montrer que si $n \in \mathbb{N}$:

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$$

Exercice 6 : [

Nombres de Catalan] On définit une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $C_0 = 1$ et pour tout naturel n, $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite ;
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $C_n \geq 2^{n-1}$;
3. Montrer par récurrence forte que pour tout $n \geq 0$, $C_n \geq 3^{n-2}$;