Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 16-09-2024.

Fiche 6 : nombres complexes.

Exercice 1

Si $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, calculer sous la forme la plus factorisée possible

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

Exercice 2

Si $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, calculer sous la forme la plus factorisée possible

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$$

Exercice 3

Déterminer les complexes z tel que :

$$\begin{cases} |z-1| \leq 1 \\ |z+1| \leq 1 \end{cases}$$

Exercice 4

On rappelle que $j = e^{2i\pi/3}$.

Soit n un entier naturel non nul. On définit :

$$a_n = \sum_{0 \leq 3k \leq n} \binom{n}{3k}, \; b_n = \sum_{0 \leq 3k+1 \leq n} \binom{n}{3k+1} \; \text{ et } \; c_n = \sum_{0 \leq 3k+2 \leq n} \binom{n}{3k+2}.$$

1. Calculer 2^n, $(1+j)^n, (1+j^2)^n$ en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. En déduire les valeurs de a_n, b_n et c_n.
   Indication : On pourra vérifier que $1 + j + j^2 = 0$

Exercice 5

Déterminer les nombres complexes z tels que le triangle ayant pour sommets les points d'affixes z, z^2, z^3 soit rectangle au point d'affixe z.

Exercice 6

Soit $z \in \mathbb{C}$ et p, q ses racines carrées. A quelle condition z, p, q forment-ils un triangle rectangle en z ?
Indication : Faire une figure.

Exercice 7 (Difficile)

Montrer que les points distincts 2 à 2 : A, B et C d'affixes respectives a, b, c forment un triangle équilatéral direct si et seulement si :

$$a + jb + j^2 c = 0$$