

DM 1, Pour le 23-09.

Exercice 1

On pose $u = \exp\left(\frac{2i\pi}{7}\right)$ et $S = u + u^2 + u^4$.

1. Combien vaut u^7 ?
2. Représenter sur le cercle trigonométrique : u, u^2, \dots, u^6 .
3. Montrer que $S + \bar{S} = -1$.
4. Calculer $S\bar{S}$ (le résultat est un entier).
5. En déduire les valeurs de S et \bar{S} (on justifiera proprement).

Exercice 2

1. Montrer que si n est un entier naturel alors :

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$$

2. Réciproquement, on considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels tous strictement positifs tel que :

$$\sum_{k=1}^n x_k^3 = \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2$$

Que pouvez vous dire de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

Exercice 3

Le but de l'exercice est de démontrer que l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ avec x, y des entiers naturels admet une infinité de solutions

1. Soit n entier naturel. Démontrer qu'il existe deux entiers naturels x_n et y_n tels que

$$\begin{cases} (3 + 2\sqrt{2})^n = x_n + \sqrt{2}y_n \\ (3 - 2\sqrt{2})^n = x_n - \sqrt{2}y_n \end{cases}$$

2. Démontrer le résultat annoncé.

Si besoin, on peut admettre que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.