Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 2024-2025.

Fiche 7 : TD du 19-09.

Exercice 1

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants : $a = -3 + 3i \quad b = 1 - i\sqrt{3}$
Mettre sous forme algébrique le complexe $a = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

Exercice 2

Déterminer les racines carrées des nombres $3 + 4i$ puis $5 + 12i$ sous forme algébrique.

Exercice 3

1. Déterminer les solutions de l'équation d'inconnue réelle x : $5x - 20x^3 + 16x^5 = 0$.
2. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, donner une expression de $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ (on pourra développer $e^{i5\theta}$).
3. Montrer alors que : $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.
4. En déduire que :
$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

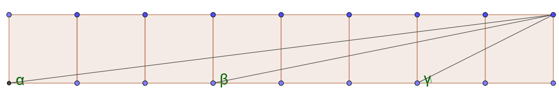
Exercice 4

On cherche à résoudre l'équation (e) :
$$P(x) = x^3 - x - \frac{1}{3}$$
d'inconnue x réelle.

1. Montrer par une étude de fonction que (e) a 3 solutions réelles et 3 seulement $x_1 < x_2 < x_3$ qui sont toutes dans l'intervalle $[-2, 2]$
2. Calculer, si $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
3. Simplifier, si $\theta \in \mathbb{R}$: $P\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\theta)\right)$
4. En déduire des expression trigonométriques de x_1, x_2 et x_3.

Exercice 5

Soit la figure suivante : on a dessiné 8 carrés et repéré les angles α, β, γ.



Montrer que $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$ (*On pourra écrire des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 dont les arguments sont α, β et γ et calculer $z_1 * z_2 * z_3$*).

Exercice 6

Trouver tous les nombres complexes z tels que les points d'affixes z, z^2 et z^4 soient alignés.