CONCOURS COMMUN 1997
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve de Physique et Chimie

Classements :

SUP (MPSI, PCSI, PTSI)

SPE (MP, PC, PSI, PT)

Mercredi 21 mai 1997 de 8 h 00 à 12 h 00

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 15 pages numérotées de 1/15 à 15/15.
Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette Physique et Chimie figurant sur leur convocation.

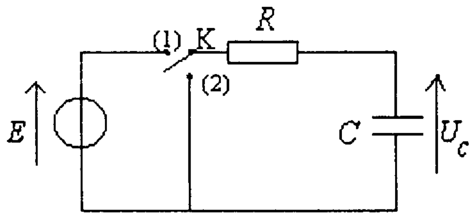
Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Toute application numérique qui ne comportera pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

PHYSIQUE

ELECTROCINETIQUE

I - Charge et décharge d'un condensateur dans une résistance *R*

On considère le circuit ci-dessous comprenant une résistance de valeur R, un condensateur de capacité C et une alimentation stabilisée de tension à vide E.



I.1 - A l'instant de date $t = 0$, on place l'interrupteur K en position (1), le condensateur étant déchargé.

I.1.1 - Exprimer la tension $U_c(t)$ aux bornes du condensateur en fonction de E, R, C et t ; on posera par la suite $\tau = RC$.

I.1.2 - Donner l'allure de la courbe donnant U_c en fonction de t.

I.2 - Le condensateur est maintenant chargé : $U_c = E$.
A $t = 0$, on place l'interrupteur sur la position (2).

I.2.1 - Exprimer la tension $U_c(t)$ aux bornes du condensateur en fonction de E, R, C et t.

En déduire que la courbe représentant les variations de $\ln\left(\dfrac{E}{U_c}\right)$ en fonction du temps est une droite dont on exprimera le coefficient directeur en fonction de R et de C.

I.2.2 - Données : $R = 10\ \text{M}\Omega$; $C = 10\ \mu\text{F}$; $E = 10$ V.

On branche un voltmètre numérique (calibre 20 V) aux bornes du condensateur et on étudie la décharge du condensateur à partir de l'instant de date $t = 0$ où on place l'interrupteur K en position (2).

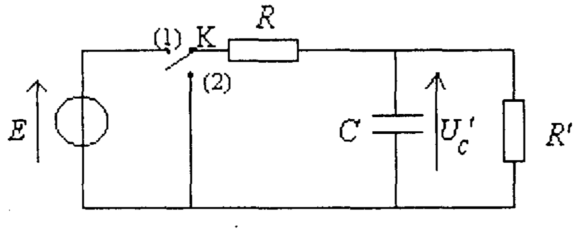
On relève les valeurs de $U_c(t)$ à différentes dates :

t (s)	5	10	15	20	30	45	60	90	120	150
U_c (V)	9,05	8,19	7,41	6,70	5,49	4,07	3,01	1,65	0,91	0,50

Tracer la courbe $\ln\left(\dfrac{E}{U_c}\right) = f(t)$.

Montrer que les résultats sont en accord avec la théorie à condition de considérer que le condensateur se décharge aussi dans le voltmètre modélisé par une résistance de valeur R' que l'on calculera.

I.3 - On considère le circuit du I.1 avec le voltmètre placé aux bornes du condensateur ; le voltmètre est modélisé par une résistance R' ; à l'instant de date $t = 0$, on place l'interrupteur K en position (1), le condensateur étant déchargé.



Montrer que l'expression de $U_c'(t)$ s'obtient très rapidement à partir de l'expression de $U_c(t)$ du I.1.1 en utilisant le théorème de Thévenin ; on exprimera $U_c'(t)$ en fonction de E, R, R', C et t.

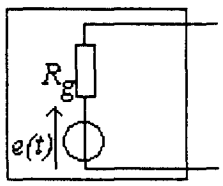
I.4 - On souhaite visualiser sur un oscilloscope la courbe du I.1 de U_c en fonction de t lors de la charge du condensateur ; on choisit comme valeurs $R = 10$ kΩ et $C = 10$ nF.

L'alimentation stabilisée est remplacée par un générateur basse fréquence (G.B.F.) ; l'oscilloscope est placé aux bornes du condensateur.

I.4.1 - Justifier brièvement pourquoi les valeurs précédentes de R et de C du I.2.2 ($R = 10$ MΩ ; $C = 10$ µF) ne sont pas satisfaisantes pour visualiser la charge du condensateur sur l'oscilloscope (pour visualiser la charge du condensateur, il faut choisir un signal dont la demi-période est égale à 5 fois la constante de temps).

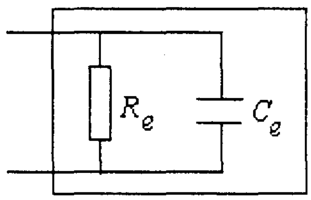
I.4.2 - La sortie du G.B.F. et l'entrée de l'oscilloscope sont modélisées ci-dessous.

G.B.F. :



$R_g = 50\ \Omega$

Oscilloscope :



$R_e = 1$ MΩ ; $C_e = 20$ pF

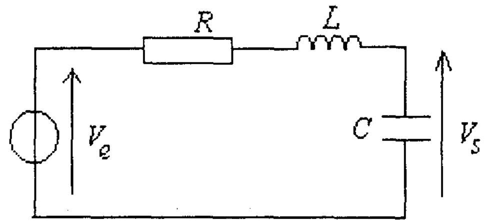
Justifier brièvement, compte tenu des limitations d'utilisation des différents appareils utilisés, le choix des valeurs de R et C.

I.4.3- Quel type de signal (sinusoïdal, triangulaire, carré, ...) faut-il choisir à la sortie du G.B.F. pour observer sur l'oscilloscope la charge du condensateur dans les conditions du I.1 ?

I.4.4 - Par un calcul rapide, donner un ordre de grandeur de la fréquence à utiliser pour observer pratiquement toute la charge du condensateur sur l'oscilloscope.

II. Condensateur en régime sinusoïdal forcé

On étudie un circuit *RLC* série représenté sur la figure ci-dessous en régime sinusoïdal forcé ; la tension $V_e(t)$ a pour expression : $V_e(t) = E \cos \omega t$.



On pose Q et ω_0 tels que : $Q = \dfrac{L\omega_0}{R}$ *et* $LC\omega_0^2 = 1$; on prend le nombre complexe j tel que $j^2 = -1$.

On appelle $\underline{V}_e(t)$ et $\underline{V}_s(t)$ les tensions complexes correspondant aux tensions instantanées d'entrée $V_e(t)$ et de sortie $V_s(t)$.

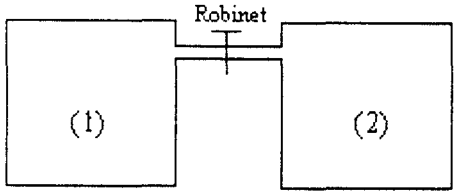
II.1 - Sans effectuer de calculs, donner les valeurs de $V_s(t)$ en basse fréquence puis en haute fréquence.
Préciser la nature du filtre.

II.2 - Déterminer la fonction de transfert de ce circuit, définie par : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{V}_s(t)}{\underline{V}_e(t)}$, en fonction de Q et de $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

II.3 - Déterminer l'expression du gain $G = \left|\dfrac{\underline{V}_s(t)}{\underline{V}_e(t)}\right|$ en fonction de x et Q ; déterminer la valeur maximale du gain en fonction de Q lorsqu'il y a résonance ($Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$).

THERMODYNAMIQUE

On considère le dispositif suivant constitué de deux compartiments rigides (1) et (2) :



Les deux compartiments de volumes respectifs V_1 et V_2 sont rigides et parfaitement calorifugés ; ils communiquent par un robinet.

Données : $V_1 = 1$ L ; $V_2 = 1$ L ; $R = 8{,}31$ J.K^{-1}.mol^{-1}.

A l'instant initial, le compartiment (1) contient n moles de gaz en équilibre à la température T_0 et le vide est fait dans le compartiment (2).
On ouvre le robinet, le gaz se répartit dans les deux compartiments et atteint un nouvel état d'équilibre thermodynamique (équilibres mécanique et thermique) ; la température est alors la même dans les deux compartiments ; cette température est notée T_f.

I - On étudie le système {gaz + parois}.
On considère que l'énergie interne des parois ne varie pas ; montrer que la transformation du gaz se fait à énergie interne constante.

II - On considère un gaz parfait monoatomique ; une mole de ce gaz est placée dans le compartiment (1) ; le compartiment (2) étant vide, on ouvre le robinet.

II.1 - Rappeler la définition du gaz parfait monoatomique. Définir et donner la valeur de la capacité thermique isochore molaire C_{Vm} d'un gaz parfait monoatomique.

II.2 - Déterminer la variation de température $\Delta T = T_f - T_0$ dans le compartiment (1).

II.3 - Montrer que la variation d'entropie ΔS du gaz s'identifie à l'entropie créée S_c au cours de la transformation.

II.4 - Etablir l'expression de l'entropie créée S_c lors de cette transformation et la calculer.

II.5 - Le résultat du II.4 est-il conforme au second principe de la thermodynamique ?

III - On considère que l'argon est un gaz réel monoatomique ayant pour équation d'état l'équation d'état de Van der Waals :

$$(P+\frac{n^2a}{V^2})(V-nb)=nRT$$

n est le nombre de moles de gaz, R la constante des gaz parfaits, a et b deux constantes.

L'énergie interne de ce gaz s'écrit :

$$U=n\,C_{Vm}T-\frac{n^2a}{V}+K$$

C_{Vm} est une constante (C_{Vm} = 12,47 $J.K^{-1}.mol^{-1}$) ; K est une constante.

III.1 - Une mole de ce gaz est placée dans le compartiment (1) ; le compartiment (2) étant vide, on ouvre le robinet.

III.1.1 - Montrer que la mesure de la variation de température dans le compartiment (1) permet de déterminer la valeur du coefficient a de l'équation de Van der Waals.

III.1.2 - Calculer la valeur de a pour $\Delta T = T_f - T_0 = -$ 5,4 K ; on précisera l'unité de a.

III.2.1 - On considère une transformation réversible de ce gaz ne faisant intervenir que des forces de pression ; exprimer le transfert thermique élémentaire δQ (ou chaleur élémentaire échangée) uniquement en fonction de n, C_{Vm}, R, b et des variables T et V.

III.2.2 - En déduire l'expression de la variation d'entropie lorsque le gaz évolue de l'état (V_1 ; T_0) à l'état ($V_1 + V_2$; T_f).

MECANIQUE

ETUDE DE DEUX MOUVEMENTS AVEC FORCE DE FROTTEMENT DU TYPE $\vec{f} = -K\vec{v}$

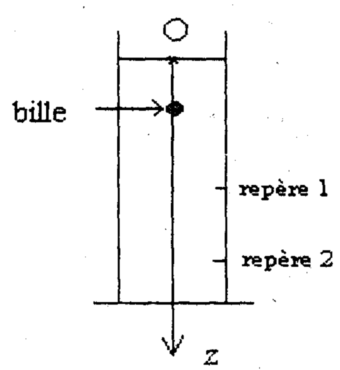
Dans tout le problème, le référentiel du laboratoire sera considéré comme galiléen.

I - Mouvement d'une bille dans un liquide

Dans cette partie, on étudie le mouvement de translation d'une bille d'acier de rayon r et de masse m dans de la glycérine de viscosité η.
On admettra que les actions de frottement exercées par le liquide sur la bille en mouvement sont modélisables par une force $\vec{f} = -\ 6\,\pi\,\eta\,r\,\vec{v}$ où $\vec{v}$ représente le vecteur vitesse de la bille.

Données :
masse volumique de l'acier : $\rho = 7800$ kg.m^{-3} ;
masse volumique de la glycérine : $\rho_0 = 1260$ kg.m^{-3} ;
$g = 9{,}8$ m.s^{-2}.

On dépose la bille en O sans vitesse initiale dans la glycérine contenue dans une grande éprouvette.



I.1 - Donner les caractéristiques de la poussée d'Archimède exercée sur la bille plongeant dans la glycérine.

I.2 - Faire le bilan des forces exercées sur la bille plongeant dans la glycérine en précisant le référentiel de travail.

I.3 - Si l'on applique le principe des actions réciproques (appelé aussi principe de l'action et de la réaction), quelle est la force réciproque du poids de la bille ?

I.4 - Etablir l'équation différentielle que vérifie la valeur de la vitesse $\vec{v}$ du centre d'inertie de la bille.

I.5 - Montrer que la vitesse de la bille tend vers une vitesse limite $\vec{v}_{\text{lim}}$ telle que :

$$v_{\text{lim}} = \|\vec{v}_{\text{lim}}\| = \frac{2(\rho - \rho_0)g}{9\eta} r^2 .$$

Donner l'expression de la constante de temps τ du mouvement.

I.6 - On mesure cette vitesse limite pour différents rayons de la bille ; la vitesse limite est mesurée entre les deux repères notés sur la figure.

r(mm)	1,50	1,60	1,75	2,00	2,25
v_{lim} (cm.s^{-1})	5,2	5,9	7,1	9,1	11,5

En déduire la viscosité η de la glycérine (la méthode utilisée sera présentée et on précisera l'unité de la viscosité).

Calculer la constante de temps pour r = 1,5 mm et conclure sur le caractère observable du phénomène.

II - Mouvement d'un proton dans un liquide

On étudie le mouvement horizontal d'un proton dans un liquide sursaturant (des bulles de gaz se créent au passage du proton et matérialisent sa trajectoire).

Un proton de masse m et de charge e, considéré comme un point matériel, a une vitesse initiale $\vec{v}_0$ en un point fixe O ; il est dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}$; le liquide exerce sur ce proton une force de frottement fluide $\vec{f} = -K\vec{v}$ où K est une constante positive et $\vec{v}$ est la vitesse du proton à l'instant de date t.

Par la suite, on posera : $\omega = \dfrac{eB}{m}$ *et* $\tau = \dfrac{m}{K}$.

II.1.1 - Faire le bilan des forces exercées sur le proton se déplaçant dans le liquide (on négligera le poids du proton).

II.1.2 - Etablir l'équation différentielle du mouvement du proton.

II.2 - On désigne par Oxyz un trièdre orthogonal direct lié au référentiel galiléen et par $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ la base de vecteurs unitaires qui lui est associée.

On choisit : $\vec{B} = B\,\vec{u}_z$ et $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{u}_x$.

II.2.1 - Si la force de frottement était négligeable, quelle serait la variation d'énergie cinétique du proton ?
Rappeler, avec un minimum de calculs, quelle serait alors la trajectoire du proton (on donnera les caractéristiques de cette trajectoire).

II.2.2 - Qualitativement, quelles sont les modifications apportées par la force de frottement fluide sur cette trajectoire ?

II.2.3 - Montrer que l'équation différentielle du II.1.2 peut se mettre sous la forme de deux équations différentielles :

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = av_y - bv_x \qquad (1)$$

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\,av_x - bv_y \qquad (2)$$

Déterminer a et b.

II.2.4 - On pose j le nombre complexe tel que $\mathrm{j}^2 = -1$; pour résoudre le système d'équations différentielles, on introduit le complexe : $\underline{V} = v_x + \mathrm{j}v_y$.

Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes à une équation différentielle dont la solution est :

$$\underline{V} = v_0\, e^{-(b+\mathrm{j}a)t}$$

En déduire v_x et v_y.

II.3.1 - Déduire de $\underline{V}$ l'expression de $\underline{X} = x(t) + \mathrm{j}\,y(t)$ en fonction de a, b, v_0 et t.

II.3.2 - Déterminer la limite, notée $\underline{X}_\infty$, de $\underline{X}$ lorsque t tend vers l'infini.

En déduire la position limite $\mathrm{M}_\infty(x_\infty, y_\infty)$ en fonction de a, b, ω et τ.

II.3.3 - Donner l'allure de la trajectoire.