

CONCOURS COMMUN 1999

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve spécifique de Physique et Chimie
(filière PCSI, option PC)

Jeudi 27 Mai 1999 de 08h00 à 12h00

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 20 pages numérotées 1/20, 2/20, ... 20/20.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Instructions particulières à l'épreuve spécifique de Physique et Chimie :

Les parties Physique et Chimie seront rédigées sur des feuilles de composition séparées, et rendues également séparées à la fin de l'épreuve.

Les candidats colleront sur leur première feuille de composition de chaque partie l'étiquette à code à barres correspondante. Sur chaque feuille de composition, ils préciseront Physique ou Chimie.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Pour la partie Physique, les candidats auront à détacher puis à utiliser la feuille millimétrée fournie en page 19/20. Ils inséreront cette feuille millimétrée dans les autres feuilles de composition après avoir reporté au verso (page 20/20) leur code d'inscription.

PROBLÈME DE CHIMIE

Cette épreuve se compose de deux parties complètement indépendantes.

Données :

Approximation de Slater : énergie orbitale associée à l'électron i : E_i

$$E_i = -E_0 \left(\frac{Z_i^*}{n^*} \right)^2 \quad \text{avec } E_0 = 13,6 \text{ eV.}$$

où n^* est le nombre quantique principal apparent, Z_i^* la charge nucléaire effective de l'électron i .

n	1	2	3	4
n^*	1	2	3	3,7

Facteurs d'écran de l'électron j sur l'électron i : $\sigma_{j \rightarrow i}$

électron i	Contribution des électrons j (de nombre quantique principal n')					$n' > n$
	$n' < n-1$	$n' = n-1$	$n' = n$			
			s, p	d	f	
1 s	-	-	0,30	-	-	0
s, p	1,00	0,85	0,35	0	0	0
d	1,00	1,00	1,00	0,35	0	0
f	1,00	1,00	1,00	1,00	0,35	0

élément	H	C	N	Cl
numéro atomique	1	6	7	17
masse molaire atomique ($\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)	1,0	12,0	14,0	35,5

Pression standard : $P^\circ = 10^5 \text{ Pa}$.

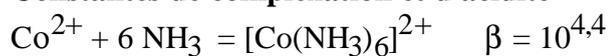
Les solutions aqueuses sont traitées dans le cadre des solutions diluées.

À 298 K, $\frac{RT}{F} \ln(10) = 0,06 \text{ V}$

couple	H ₂ O / H ₂	O ₂ / H ₂ O	Co _{aq} ³⁺ / Co _{aq} ²⁺	[Fe(CN) ₆] ³⁻ / [Fe(CN) ₆] ⁴⁻
potentiel standard rédox à pH = 0 (en volt)	0,00	1,23	1,80	0,45
Notation	E ₁ [°]	E ₂ [°]	E ₃ [°]	E ₄ [°]

Les notations Co_{aq}³⁺ et Co_{aq}²⁺ correspondent aux ions complexes [Co(H₂O)₆]³⁺ et [Co(H₂O)₆]²⁺

Constantes de complexation et d'acidité



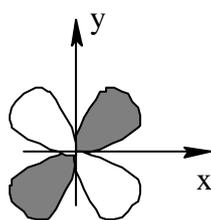
$$\text{pK}_a(\text{NH}_4^+ / \text{NH}_3) = 9,2$$

Énergie molaire d'éclatement du champ cristallin : Δ_o

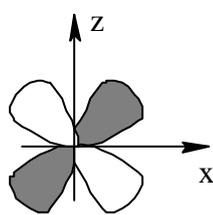
Énergie moyenne d'appariement de deux électrons : P

	[Co(H ₂ O) ₆] ³⁺	[Co(NH ₃) ₆] ³⁺
Δ _o (kJ.mol ⁻¹)	218	274
P (kJ.mol ⁻¹)	226	226

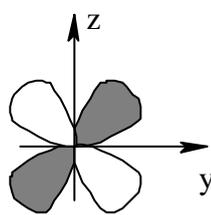
Formes des OA d.



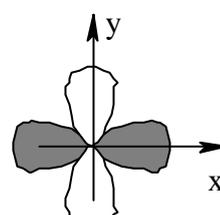
d_{xy}



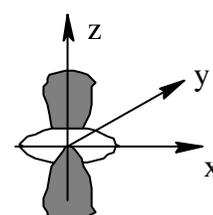
d_{xz}



d_{yz}



d_{x²-y²}



d_{z²}

PARTIE I : Autour du cobalt

I.1 : Configurations électroniques du cobalt et de ses ions

Le cobalt ($Z = 27$) peut donner des ions cobalt (II) et cobalt (III) par perte de deux ou trois électrons de valence.

I-1-1 : Donner la configuration électronique du cobalt dans son état fondamental.

I-1-2 : Donner les trois configurations électroniques envisageables pour l'ion Cobalt (II) selon que le cobalt perd deux électrons s , un électron s et un électron d ou deux électrons d .

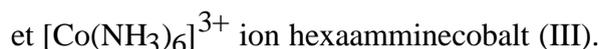
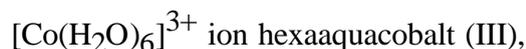
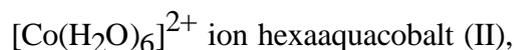
I-1-3 : Comparer les énergies orbitales de l'ion cobalt (II) pour chaque configuration électronique envisagée en présentant le résultat sous la forme : $E(\text{Co (II)}) = E(\text{e- de cœur}) + E(\text{e- externes})$.
Le calcul de l'énergie orbitale des électrons de cœur $E(\text{e- de cœur})$ n'est pas demandé.
En déduire la configuration électronique la plus stable pour l'ion cobalt (II).

I.2 : Théorie du champ cristallin

Les ions cobalt (II) et cobalt (III) donnent en présence de ligands des ions complexes de structure octaédrique.

I-2-1 : Préciser pourquoi, dans un complexe octaédrique, les orbitales d sont séparées en deux groupes d'énergie différente.
Représenter schématiquement un diagramme traduisant la levée partielle de dégénérescence des OA d .

I-2-2 : En admettant que, dans le cas des ions cobalt (II) et cobalt (III), l'eau est un ligand à champ faible et l'ammoniac un ligand à champ fort, représenter le remplissage des niveaux électroniques $3d$ des ions complexes suivants :



I-2-3 : Ces ions sont-ils paramagnétiques ou diamagnétiques ?

I-2-4 : Justifier le caractère plus réducteur de l'ion $[\text{Co}(\text{NH}_3)_6]^{2+}$ par rapport à l'ion $[\text{Co}(\text{H}_2\text{O})_6]^{2+}$.

I-2-5 : On appelle énergie molaire de stabilisation du champ cristallin (ESCC) la différence entre l'énergie molaire de la configuration et l'énergie molaire des électrons dans l'environnement sphérique.

Calculer l'ESCC pour les ions $[\text{Co}(\text{H}_2\text{O})_6]^{3+}$ et $[\text{Co}(\text{NH}_3)_6]^{3+}$. Les valeurs numériques nécessaires sont rassemblées en début de problème.

I.3 : Stabilité des ions cobalt en milieu aqueux

I-3-1 : On étudie une solution aqueuse de nitrate de cobalt (III) en milieu acide afin de s'affranchir de toute formation d'oxyde ou d'hydroxyde de cobalt.

Calculer le potentiel E_2 du couple $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$ pour une activité en ion H_3O^+ égale à 1 et pour une pression en dioxygène égale à $2 \cdot 10^4$ Pa.

En déduire qu'une solution aqueuse de nitrate de cobalt (III), laissée au contact de l'air, n'est pas stable en milieu acide. Ecrire l'équation-bilan de la réaction thermodynamiquement possible. Le calcul de la constante d'équilibre n'est pas demandé. On pourra éventuellement tracer le diagramme de prédominance des ions cobalt (II), (III), du dioxygène et de l'eau.

I-3-2 : Calculer le potentiel standard E_5° du couple $[\text{Co}(\text{NH}_3)_6]^{3+} / [\text{Co}(\text{NH}_3)_6]^{2+}$.

I-3-3 : Calculer le potentiel E_2' du couple $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$ à $\text{pH} = 9,5$ et pour une pression en dioxygène égale à $2 \cdot 10^4$ Pa.

Justifier le fait que, lors d'un dosage d'une solution d'ion cobalt (II) par oxydation en ion cobalt (III), on réalise celui-ci en milieu ammoniacal.

On pourra éventuellement tracer le diagramme de prédominance des ions $[\text{Co}(\text{NH}_3)_6]^{3+}$, $[\text{Co}(\text{NH}_3)_6]^{2+}$, du dioxygène et de l'eau.

I-3-4 : Pour obtenir la solution tampon de $\text{pH} = 9,5$, on dispose d'un litre de solution d'ammoniac à $1,0 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et de chlorure d'ammonium solide. En négligeant toute variation de volume de la solution, quelle masse de chlorure d'ammonium faut-il ajouter à la solution ammoniacale pour obtenir un litre de solution tampon à $\text{pH} = 9,5$? Quelles sont les propriétés de la solution obtenue ?

I-3-5 : Dans 100 mL de la solution tampon précédente, on introduit 0,010 mol de nitrate de cobalt (II). Sous quelle forme se trouve le cobalt (II) dans la solution ?

Sous quelle forme se trouve le cobalt (III) obtenu après oxydation de la solution précédente ?

Justifier la réponse sans calcul.

I.4 : Dosage d'une solution de cobalt (II)

Une solution S a une composition voisine de la solution précédente. On prélève un volume $v_0 = 10,0$ mL de la solution S et on dose par une solution d'hexacyanoferrate (III) de potassium $K_3Fe(CN)_6$, composé totalement soluble, de concentration $c_e = 0,100$ mol.L⁻¹. Le dosage, suivi par potentiométrie, est effectué en présence d'un courant de diazote afin d'éviter toute réaction d'oxydation par le dioxygène de l'air.

I-4-1 : Sachant que les ions du fer restent complexés par les ions cyanure, écrire l'équation bilan de la réaction de dosage et calculer sa constante thermodynamique. Conclure.

I-4-2 : Quelles sont les électrodes utilisées pour un tel dosage ? Préciser leur rôle (la description détaillée des électrodes n'est pas demandée).

I-4-3 : Un saut de potentiel est observé pour un volume versé de solution d'ions $[Fe(CN)_6]^{3-}$ égal à $v_e = 9,2$ mL. Déterminer la concentration c_0 en ions cobalt (II) de la solution S.

I-4-4 : Déterminer les valeurs du potentiel de la solution quand on a versé des volumes d'hexacyanoferrate (III) de potassium égaux à :

$$v_1 = 3,0 \text{ mL}$$

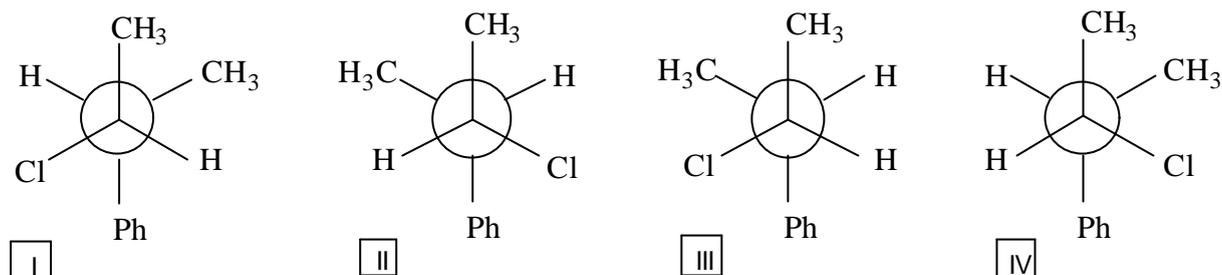
$$v_e = 9,2 \text{ mL}$$

$$v_2 = 14,0 \text{ mL.}$$

Partie II : Chimie organique

II.1 : Le 2-chloro-3-phénylbutane

II-1-1 : On s'intéresse au 2-chloro-3-phénylbutane. Ce composé possède quatre stéréoisomères de configuration. On donne pour les quatre stéréoisomères, notés I, II, III et IV, une projection de Newman suivant l'axe C₂-C₃.



Préciser les configurations absolues de chaque carbone asymétrique en donnant l'ordre des substituants suivant les règles de Cahn, Ingold et Prélog.

Quelles sont les relations d'énantiométrie et de diastéréoisométrie entre les différents stéréoisomères ?

II-1-2 : On traite le stéréoisomère de configuration (2R,3R) noté **A** par la soude dans un mélange eau-éthanol.

En admettant que l'on se trouve dans des conditions d'élimination E₂, on obtient deux alcènes **B1** et **B2**, **B1** majoritaire devant **B2**.

Préciser le mécanisme réactionnel pour l'obtention de **B1**.

Donner les noms de **B1** et **B2** en précisant si nécessaire l'isométrie géométrique Z/E.

II-1-3 : L'addition de dibrome en solution dans le tétrachlorométhane sur **B1** conduit à l'obtention de deux composés **C1** et **C2**. Donner le mécanisme de la réaction et le nom des produits obtenus.

Préciser la particularité stéréochimique de la réaction.

II.2 : Étude cinétique de l'hydrolyse du (S) 1-bromo-1-phényléthane

On envisage l'étude d'une réaction de substitution nucléophile : l'hydrolyse du (S) 1-bromo-1-phényléthane noté **D**. La cinétique de la réaction est suivie par conductimétrie en mesurant la conductance G de la solution en fonction du temps.

La conductivité σ de la solution est directement proportionnelle à la conductance : $\sigma = G.K$ où K est la constante de cellule (exprimée en m⁻¹).

Par ailleurs, la conductivité de la solution a pour expression : $\sigma = \sum_i I_i^0 \cdot c_i$

I_i^0 représente la conductivité molaire à dilution infinie de l'ion i exprimée en S.m².mol⁻¹

c_i représente la concentration molaire de l'ion i exprimée en mol.L⁻¹.

On plonge une cellule de conductimétrie dans 100 mL d'eau distillée. On introduit 0,010 mole de composé **D** en déclenchant le chronomètre et on suit l'évolution de la conductance de la solution en fonction du temps.

II-2-1 : La réaction est une substitution nucléophile de type S_N1 .

Justifier le mécanisme S_N1 par la structure du composé **D**. Ecrire le mécanisme de la réaction.

La solution obtenue au bout d'un temps infini présente-t-elle une activité optique ?

II-2-2 : Écrire l'équation bilan de la réaction en représentant l'halogénoalcane par RBr.

Exprimer la vitesse de la réaction en désignant par k la constante de vitesse.

II-2-3 : On désigne par :
 σ la conductivité de la solution à l'instant t ,
 σ_∞ la conductivité de la solution au bout d'un temps suffisamment long pour considérer la réaction totale,
 c_0 la concentration initiale en **D** et
 c la concentration en **D** à l'instant t .

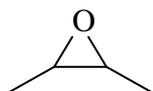
Exprimer σ et σ_∞ en fonction de c_0 , c , $I^0(\text{H}^+_{\text{aq}})$ et $I^0(\text{Br}^-_{\text{aq}})$.

Montrer que le tracé de $\ln\left(\frac{\sigma_\infty - \sigma}{\sigma_\infty}\right)$ en fonction du temps permet de vérifier que la cinétique de la réaction est compatible avec un ordre 1 par rapport à **D**.

II-2-4 : Dans les conditions de l'expérience peut-on différencier une réaction S_N1 d'une réaction S_N2 ?

II.3 : Synthèse de l'énantiomère de A

II-3-1 : Soit **E**, le 2,3 époxibutane de formule développée plane :



Combien de stéréoisomères peut-on dénombrer pour **E** ?

II-3-2 : On fait réagir le bromobenzène dans l'éthoxyéthane (éther) en présence de magnésium. On obtient **F**. On fait ensuite réagir **E** sur **F** et, après hydrolyse acide, on obtient **G**. Écrire les équations bilans des réactions.

II-3-3 : Pour terminer la synthèse, on fait réagir **G** sur le chlorure de thionyle (SOCl_2) dans l'éther.

Quelle est l'équation bilan de la réaction ?

Sachant que, lors de cette dernière réaction, il y a rétention de configuration, sur quel stéréoisomère de **E** faut-il effectuer la suite de réactions pour obtenir un énantiomère de **A** (la configuration de **A** est précisée question II-1-2) ?

PROBLÈME DE PHYSIQUE

Le problème traite de différents aspects de Physique nucléaire.

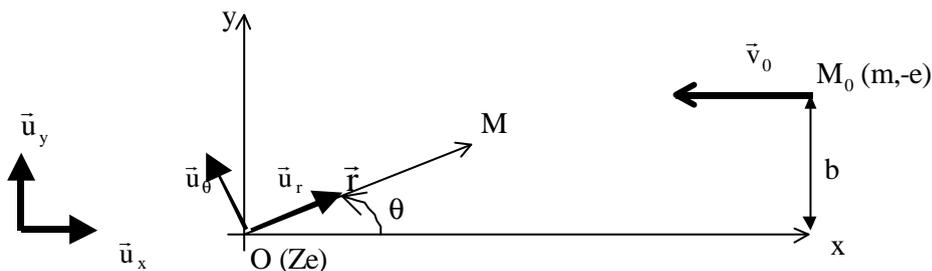
Les trois parties du problème sont totalement indépendantes les unes des autres.

Dans les parties (I) et (II), les paragraphes (I-1) et (I-2) ainsi que (II-1) et (II-2) sont également indépendants.

I. MÉCANIQUE

I-1 : Diffusion élastique

Dans cette première partie, on s'intéresse à la diffusion élastique d'un électron sur un noyau d'Or.



L'interaction entre l'électron M (de masse m et de charge $-e$) et le noyau d'Or (de charge $+Ze$) est supposée être de nature purement électrostatique.

Le noyau d'Or, beaucoup plus lourd que l'électron, est considéré au repos dans le référentiel (\mathfrak{R}) galiléen du Laboratoire et est confondu avec l'origine O d'un repère cartésien (Oxyz) (voir figure).

L'étude du mouvement de l'électron est effectuée dans le référentiel (\mathfrak{R}).

L'électron possède initialement (lorsqu'il est infiniment éloigné du noyau d'Or, à la sortie d'un accélérateur, situé au point M_0) un vecteur vitesse $\vec{v}_0 = -v_0 \vec{u}_x$. Sa trajectoire est alors rectiligne et on note b la distance entre l'axe (Ox) et cette trajectoire (b est appelé paramètre d'impact).

I-1-1 : L'énergie cinétique communiquée à l'électron à la sortie de l'accélérateur est $E_0 = 10 \text{ eV}$. Calculer numériquement la vitesse v_0 de l'électron.

Données : $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

L'étude du mouvement de l'électron peut-elle être entreprise dans le cadre de la Mécanique Newtonienne ?

I-1-2 : Exprimer la force \vec{f} que le noyau d'Or exerce sur l'électron, en fonction de ϵ_0 (permittivité du vide), Z , e , $r = OM$ et le vecteur unitaire $\vec{u}_r = \vec{OM}/r$.

I-1-3 : Démontrer que cette force dérive d'une énergie potentielle $E_p(r)$ dont on donnera l'expression en fonction de ϵ_0 , Z , e et r (on choisit comme convention que $\lim_{r \rightarrow \infty} E_p = 0$).

I-1-4 : Définir l'énergie mécanique, notée E_m , de l'électron et montrer que E_m est une constante du mouvement.

I-1-5 : Le moment cinétique de l'électron par rapport à O est, par définition :

$$\vec{\sigma}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

où \vec{v} est le vecteur vitesse de l'électron à un instant t quelconque.

a) Montrer que $\vec{\sigma}_O$ est un vecteur constant. L'exprimer en fonction de m , b , v_0 et $\vec{u}_z = \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y$.

b) En déduire que la trajectoire est contenue dans le plan (Oxy) .

c) On note r et θ les coordonnées polaires de l'électron dans le plan (Oxy) . Exprimer $\vec{\sigma}_O$ en fonction de m , des coordonnées polaires et de leurs dérivées temporelles et du vecteur \vec{u}_z .

I-1-6 : Montrer que l'énergie mécanique de l'électron peut s'écrire sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E'_p(r)$$

Exprimer $E'_p(r)$ en fonction de $E_p(r)$, m , σ_O et r . Comment se nomme $E'_p(r)$? Quel est l'intérêt de $E'_p(r)$?

I-1-7 : On note S la position de l'électron pour laquelle celui-ci passe au plus près du noyau d'Or. Soit $r_{\min} = OS$ la distance entre O et S , appelée distance minimale d'approche.

a) Tracer qualitativement la trajectoire de l'électron puis dessiner le vecteur vitesse de l'électron au point S .

b) Déterminer la distance minimale d'approche r_{\min} en fonction de Z , e , m , E_0 et σ_O .

I-1-8 : On rappelle les première et seconde formules de Binet, donnant les expressions des vecteurs vitesse \vec{v} et accélération \vec{a} de l'électron :

$$\vec{v} = \frac{\sigma_O}{m} \left[-\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{1}{r} \right) \vec{u}_\theta \right]$$

$$\vec{a} = -\frac{\sigma_O^2}{m^2 r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] \vec{u}_r$$

a) Déterminer une équation différentielle vérifiée par la fonction $u = 1/r$ considérée comme fonction de la variable θ .

b) Montrer que la fonction $u(\theta)$ peut s'écrire sous la forme :

$$u = A \cos(\theta - \alpha) + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{m}{\sigma_0^2}$$

où A et α sont deux constantes d'intégration que l'on ne cherchera pas à calculer dans cette question.

c) En tenant compte des conditions initiales, montrer que :

$$A = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{m}{\sigma_0^2} \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{Ze^2} v_0 \sigma_0 \right)^2}$$

Et :

$$\tan \alpha = -\frac{4\pi\epsilon_0}{Ze^2} \sigma_0 v_0 \quad \left(\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] \right)$$

d) En déduire que la distance r s'exprime sous la forme :

$$r = \frac{p}{1 + E \cos(\theta - \alpha)}$$

Déterminer les constantes p et E en fonction des données Z , e , ϵ_0 , m et σ_0 .

Que représente mathématiquement la constante E ? En déduire la nature de la trajectoire de l'électron.

e) On note \vec{v}'_0 le vecteur vitesse de l'électron après diffusion, lorsque celui-ci est de nouveau très éloigné du noyau d'Or. Préciser la norme ainsi que la direction de ce vecteur vitesse.

I-2 : Formation d'un noyau composé

Un des aspects de la Physique Nucléaire est d'étudier le comportement de noyaux lourds hautement énergétiques afin de déterminer le comportement collectif des nucléons (protons et neutrons) et d'appréhender la nature des forces entre ces particules.

Pour réaliser expérimentalement des noyaux lourds, on bombarde des noyaux d'Argent ($A_c = 108$ nucléons et $Z_c = 48$ protons) supposés fixes dans le référentiel galiléen du Laboratoire, avec des noyaux de Cuivre ($A_p = 63$ nucléons et $Z_p = 29$ protons) d'énergie cinétique E_0 et de vitesse \vec{v}_0 évaluées dans le même référentiel. Un noyau d'Argent fusionne alors avec un noyau de Cuivre pour former un noyau composé d'Iridium, comportant $A_p + A_c$ nucléons et $Z_p + Z_c$ protons.

On note m_h la masse d'un nucléon.

I-2-1 : Soit \vec{V}_{comp} le vecteur vitesse du noyau composé juste après la fusion. Déterminer \vec{V}_{comp} en fonction de \vec{v}_0 , A_p et A_c .

I-2-2 : Déterminer l'énergie cinétique $E_{c,\text{comp}}$ du noyau composé juste après la fusion, en fonction de E_0 , A_p et A_c . Évaluer la perte d'énergie cinétique ΔE_c lors de la fusion en fonction des mêmes données. Où est passée l'énergie manquante ?

II. ÉLECTROSTATIQUE - THERMODYNAMIQUE

Le but de cette deuxième partie est d'étudier certaines propriétés électrostatiques et thermodynamiques des noyaux des atomes.

II-1 : Électrostatique

Le noyau d'Or est constitué de $A = 197$ nucléons (protons + neutrons) et de $Z = 79$ protons. Ces protons portent chacun une charge électrique égale à la charge élémentaire e ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C). Dans la suite, le noyau d'Or est supposé sphérique (de rayon $R = R_0 A^{1/3}$, avec $R_0 = 1,3 \cdot 10^{-15}$ m) et la charge électrique totale portée par le noyau est répartie de manière uniforme au sein du noyau.

II-1-1 : Déterminer, en fonction de Z , A , e et R_0 , la densité volumique de charges ρ au sein du noyau d'Or. Faire l'application numérique.

II-1-2 : Énoncer le théorème de Gauss relatif au champ électrostatique créé par une répartition volumique de charges caractérisée par une densité volumique notée ρ .

II-1-3 : On désire calculer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par un atome d'Or en tout point M de l'espace. On choisit un repère (Oxyz) cartésien dont l'origine coïncide avec le centre de l'atome d'Or. Soit $\vec{r} = \vec{OM}$ le rayon vecteur du point M .

a) Montrer que le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ s'écrit nécessairement sous la forme :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r \quad (\text{où : } r = \|\vec{r}\| \text{ et } \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r})$$

b) En utilisant le théorème de Gauss, déterminer la valeur algébrique du champ $E(r)$ dans les deux cas : $r < R$ et $r > R$, en fonction de Z , e , ϵ_0 , R et r .

II-1-4 : En déduire le potentiel électrostatique $V(r)$ créé par le noyau d'Or en tout point de l'espace ($r < R$ puis $r > R$) en fonction de Z , e , ϵ_0 , R et r .

II-1-5 : Tracer les représentations graphiques de $E(r)$ et de $V(r)$. Justifier, *a posteriori*, que l'on pouvait considérer le noyau d'Or comme étant ponctuel dans la partie (I-1).

II-2 : Thermodynamique

Au sein des noyaux lourds (à grand nombre de nucléons), la matière nucléaire (protons et neutrons) se comporte comme un fluide pour lequel on peut définir des variables d'état macroscopiques, comme la pression P , le volume V et la température T par exemple.

Un modèle très simple d'équation d'état de la matière nucléaire est celui d'un fluide de Van der Waals.

Le but de cette partie est d'étudier les propriétés d'un fluide régi par l'équation d'état de Van der Waals afin d'appliquer, de manière très rudimentaire, cette équation à la matière nucléaire.

L'équation d'état d'une mole de fluide étudié est de la forme :

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

où P désigne la pression du fluide, V son volume et T sa température ; R est la constante des gaz parfaits ($R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}$).

a et b sont deux constantes phénoménologiques caractéristiques du fluide étudié :

$$a = 2,5 \cdot 10^{-1} \text{ SI} \quad ; \quad b = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ SI}$$

L'énergie interne d'une mole de fluide est :

$$U(T, V) = C_v T - \frac{a}{V}$$

où C_v est la capacité calorifique molaire à volume constant du fluide, qui sera considérée comme étant constante dans toute la suite du problème.

II-2-1 : Déterminer les unités de a et de b dans le système d'unités international.

II-2-2 : Quelle est l'interprétation physique de b ? On assimile les particules de fluide à des sphères de rayon r . Donner un ordre de grandeur de r . On rappelle que le nombre d'Avogadro vaut $N = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

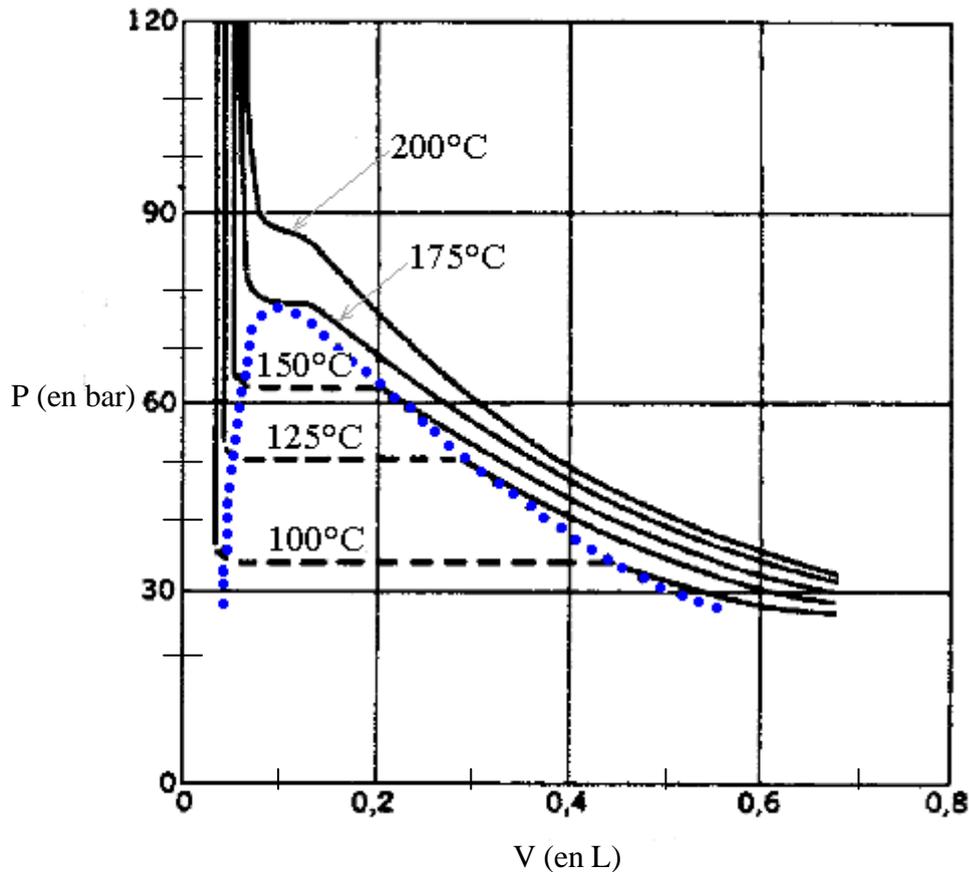
II-2-3 : Montrer que la fonction entropie d'une mole de fluide $S(T, V)$ s'écrit, en fonction des variables T et V , sous la forme :

$$S(T, V) = C_v \ln T + R \ln(V - b) + \text{cste}$$

II-2-4 : On réalise une transformation adiabatique réversible conduisant une mole de fluide de l'état ($T_0 = 300 \text{ K}$, $V_0 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 20 \text{ L}$) à l'état (T_1 , $2V_0$).

- Déterminer T_1 en fonction de T_0 , V_0 , b , R et C_v .
- On mesure expérimentalement $T_1 = 230 \text{ K}$; en déduire numériquement la capacité calorifique molaire C_v du fluide. Quelle est, *a priori*, la structure moléculaire des particules du fluide étudié ?
- Déterminer le travail reçu par le fluide lors de cette transformation, en fonction de T_0 , T_1 , V_0 , a et C_v . Faire l'application numérique.

II-2-5 : La figure ci-dessous donne un ensemble de courbes expérimentales, appelées isothermes d'Andrews, représentant la pression P d'une mole de fluide (P est exprimée en bar, avec $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$) en fonction du volume V occupé (V est en litre, L), pour différentes températures en $^{\circ}\text{C}$:

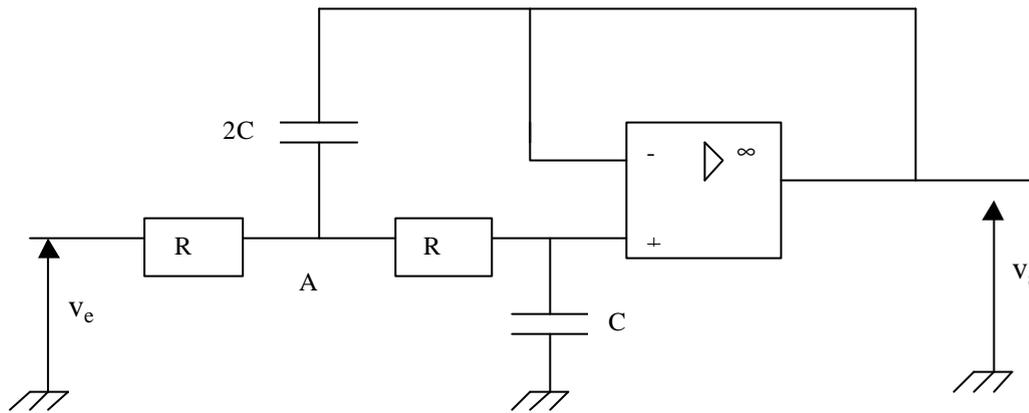


- Comment s'appelle la courbe tracée en pointillés sur la figure ci-dessus ?
- Déterminer les coordonnées (P_c, V_c) du point critique C . Donner, en quelques mots, les propriétés physiques de ce point.
- Préciser l'état physique du fluide et calculer, après les avoir définis, les titres molaires x_v et x_ℓ de la vapeur et du liquide dans les trois cas suivants :
 - le fluide occupe un volume égal à 0,6 L à une température de 110°C.
 - le fluide est placé sous une pression de 110 bars à une température de 200°C.
 - le fluide occupe un volume de 0,2 L à une température de 125°C.
- Que vaut le volume molaire de la vapeur saturante sèche à la pression de 40 bars ?

III. ÉLECTRONIQUE

Les interactions entre les particules chargées et les détecteurs génèrent des signaux électriques qui doivent être sélectionnés et amplifiés. Il est donc nécessaire d'utiliser des montages électroniques sophistiqués. Le but de cette troisième partie est d'étudier un exemple simple de circuit électronique permettant de filtrer certains signaux et d'en éliminer d'autres.

On considère le circuit électronique suivant :



L'amplificateur opérationnel est supposé idéal et fonctionne en régime linéaire.

III-1 : Étude en régime permanent sinusoïdal

La tension d'entrée est fournie par un générateur basse fréquence et s'écrit $v_e = E_m \cos \omega t$ où E_m est la valeur maximale et ω la pulsation de la tension d'entrée.

La tension de sortie sera notée $v_s = V_m \cos(\omega t + \varphi)$ où V_m désigne la valeur maximale de la tension de sortie et φ le déphasage de celle-ci par rapport à la tension d'entrée.

L'étude mathématique du filtre sera effectuée en utilisant la notation complexe \underline{v}_e et \underline{v}_s pour ces deux tensions :

$$\underline{v}_e = E_m e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{v}_s = V_m e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (\text{avec } j^2 = -1)$$

III-1-1 : Déterminer par des considérations physiques, de manière qualitative et sans calculs, la nature probable du circuit électronique proposé.

III-1-2 : Montrer que la fonction de transfert de ce circuit peut s'exprimer sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{1}{1 + 2jRC\omega - 2(RC)^2 \omega^2}$$

III-1-3 : Déterminer, en fonction de R, C et ω :

- le gain du filtre, noté $G(\omega)$.
- le déphasage φ , dont on donnera l'expression de $\tan \varphi$ et pour lequel on donnera l'intervalle de variation.

III-1-4 : On souhaite écrire la fonction de transfert sous forme normalisée :

$$H(j\omega) = \frac{y_s}{y_e} = \frac{1}{1 + 2j\sigma \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Exprimer les constantes σ (coefficient d'amortissement du filtre) et ω_0 en fonction de R et de C. Justifier brièvement la nature du filtre.

III-1-5 : Donner, en fonction de $G(\omega)$, la définition du gain exprimé en décibels (dB), noté dans la suite G_{dB} . Déterminer le comportement asymptotique du gain en décibels G_{dB} , c'est-à-dire l'expression simplifiée de G_{dB} pour $\omega \ll \omega_0$ et $\omega \gg \omega_0$.

Dans la suite, on considérera que $\omega \ll \omega_0$ si $\omega < \omega_0/10$ et que $\omega \gg \omega_0$ si $\omega > 10\omega_0$.

III-1-6 : Applications numériques : on donne $C = 1\mu\text{F} = 10^{-6}\text{F}$ et $R = 100\ \Omega$.

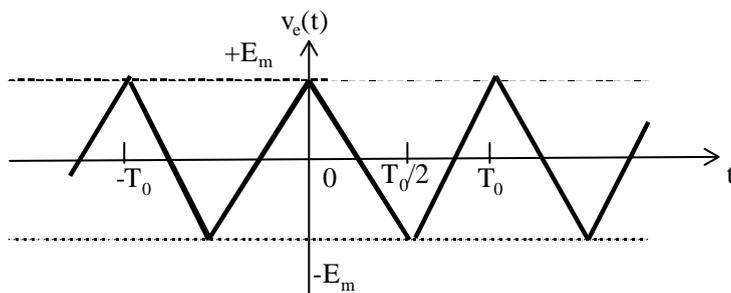
- Calculer ω_0 .
- Tracer, sur feuille millimétrée fournie avec l'énoncé (en page n°19/20), le diagramme de Bode en amplitude du filtre, c'est-à-dire la courbe représentative de G_{dB} en fonction de ω en échelle logarithmique. On fera varier ω entre 10^2 et $10^6\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.
- Définir, puis calculer, la bande passante du filtre.

III-2 : Analyse de Fourier

La tension d'entrée est désormais une tension triangulaire (voir figure ci-dessous) de pulsation ω_0 (définie à la question (III-1-4)) et de période $T_0 = 2\pi/\omega_0$, dont la décomposition en série de Fourier s'écrit :

$$v_e(t) = \frac{8E_m}{\pi^2} \left[\cos\omega_0 t + \frac{1}{3^2} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2} \cos(5\omega_0 t) + \dots \right]$$

E_m , valeur maximale de v_e , vaut ici $E_m = 1\ \text{V}$.



On constate expérimentalement que la tension de sortie v_s est une fonction sinusoïdale du temps.

III-2-1 : Définir les termes : fondamental et harmonique de rang n .

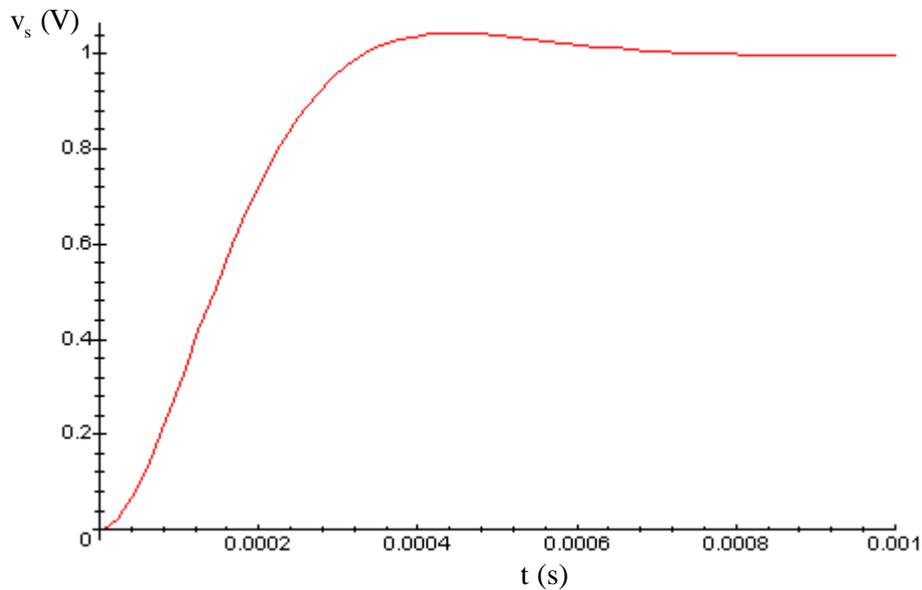
III-2-2 : Déterminer la pulsation ω de la tension de sortie.

III-2-3 : Calculer numériquement la valeur maximale de la tension de sortie.

III-3 : Étude du circuit en régime transitoire

La tension d'entrée v_e est désormais quelconque.

III-3-1 : Déterminer, en utilisant l'expression de la fonction de transfert donnée à la question (III-1-2), l'équation différentielle du second ordre qui relie les deux tensions v_e et v_s .



III-3-2 : On suppose que la tension d'entrée est un échelon de tension, c'est-à-dire que $v_e(t) = 0$ pour $t < 0$ et $v_e(t) = E$ pour $t \geq 0$, où E est une tension constante. La figure ci-dessus, obtenue avec un logiciel de calculs formels (MAPLE), donne la variation de la tension de sortie v_s en fonction du temps. Les valeurs numériques sont les mêmes que celles de la question (III-1-6).

- a) Quelle est la valeur numérique de la tension E ?
- b) Quelle est la nature du régime transitoire observé ? Pourquoi ? Quels (brefs) commentaires peut-on faire sur cette courbe ? Aucun développement mathématique n'est demandé dans cette question.

