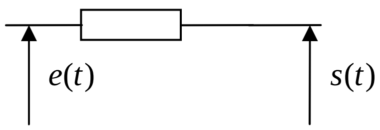
Correction épreuve spécifique Physique (Filière PCSI) Mines Albi, Alès, Douai, Nantes Mai 2004,

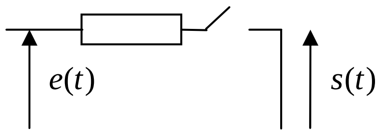
Proposée par Christian Giraud (christian.giraud@ac-caen.fr) et Thierry Pré (thierry.pre@prepas.org)

PARTIE 1 : Le facteur de qualité en électronique : Étude d'un filtre passif

1. À basse fréquence, l'inductance se comportant comme un fil, et le condensateur comme un interrupteur ouvert, le schéma équivalent du circuit est le suivant :



On a donc $s(t) = e(t)$ à basse fréquence.
À haute fréquence, l'inductance se comportant comme un interrupteur ouvert, et le condensateur comme un fil, le schéma équivalent du circuit est le suivant :



On a donc $s(t) = 0$ à basse fréquence.
Ce filtre est donc un filtre passe bas.

2.
a) Pour établir la fonction de transfert, il suffit d'appliquer la règle du diviseur de tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{RjC\omega - LC\omega^2 + 1} = \frac{1}{1 + \frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \text{ avec : } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

et $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$. C'est un filtre d'ordre 2.

b) On a les équivalences suivantes entre la notation complexe et la notation réelle :
$j\omega \leftrightarrow \frac{d}{dt}$; $\frac{1}{j\omega} \leftrightarrow \int dt$. On a : $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$, donc en complexe :
$\underline{s} \times \left(1 + \frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) = \underline{e}$, soit en notation réelle :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{1}{Q\omega_0}\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

Le régime transitoire correspond à la solution de l'équation sans second membre. Ici tous les coefficients de l'équation différentielle sont positifs, donc les racines de l'équation caractéristique ont une partie réelle négative. Nous aurons donc comme solutions des exponentielles convergentes quand $t \to \infty$.

3. $$\left|\underline{H}(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}$$

4. $\left|\underline{H}(j\omega)\right|$ passe par un maximum quand : $\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}$ passe par un minimum. Comme la fonction : $x \to \sqrt{x}$ est croissante, $\left|\underline{H}(j\omega)\right|$ passe par un maximum quand :

$\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}$ passe par un minimum, c'est-à-dire quand :

$2\times\left(-2\frac{\omega}{\omega_0}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + 2\frac{\omega}{Q^2\omega_0^2} = 0$, et comme $\omega \neq 0$, $\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = \frac{1}{2Q^2}$, soit finalement :

$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{1}{2Q^2}$.

- Si : $1-\frac{1}{2Q^2} > 0$, soit $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors le maximum de $\left|\underline{H}(j\omega)\right|$ se produit pour :

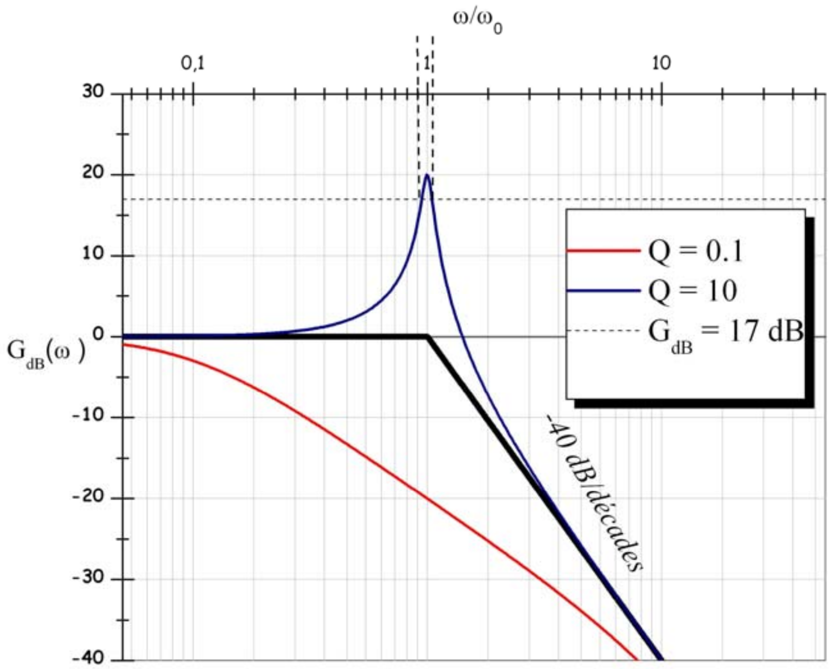
  $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$.
- Si $1-\frac{1}{2Q^2} < 0$, soit $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $\left|\underline{H}(j\omega)\right|$ n'a pas de maximum.
- Ce phénomène s'appelle la résonance

5. $$G_{dB}(\omega) = 20\log\left(\left|\underline{H}(j\omega)\right|\right) = -10\log\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}\right)$$

- Quand : $\omega \to 0$: $G_{dB}(\omega) \to 0$
- Quand : $\omega \to \infty$: $G_{dB}(\omega) \to -10\log\left(\frac{\omega^4}{\omega_0^4}\right) = -40\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$, nous aurons donc une pente

  à -40 dB/décades.
- $G_{dB}(\omega_0) = 20\log Q$

6. Pour la bande passante il suffit de remarquer que : $20\log\left(\sqrt{2}\right) \simeq -3$.



7.

a) $$\underline{i}=\frac{\underline{e}}{R+jL\omega+\dfrac{1}{jC\omega}}=\frac{\dfrac{\underline{e}}{R}}{1+\dfrac{jL\omega}{R}+\dfrac{1}{jRC\omega}}=\frac{\dfrac{\underline{e}}{R}}{1+j\dfrac{Q\omega}{\omega_0}-j\dfrac{Q\omega_0}{\omega}}=\frac{\dfrac{\underline{e}}{R}}{1+jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}.$$

L'amplitude du courant est donnée par : $|\underline{i}|=\dfrac{\dfrac{|\underline{e}|}{R}}{\sqrt{1+Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$, qui est maximale quand $\omega=\omega_0$, et $I_{\max}=\dfrac{|\underline{e}|}{R}$. Quand $\omega=\omega_0$, la fonction de transfert est purement réelle, donc l'intensité $i(t)$ est en phase avec $e(t)$. Donc d'après l'énoncé (avant la question 1) : $i(t)=I_{\max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$ …

b) On a : $i(t)=C\dfrac{du_c(t)}{dt}=I_{\max}\cos(\omega_0 t)$, donc : $u_c(t)=\dfrac{I_{\max}}{C\omega_0}\sin(\omega_0 t)+cte$. Si le condensateur n'est pas chargé initialement, la cte est nulle.

c) $$\Delta W=\int_0^T u_R(t)i(t)dt=\int_0^{2\pi/\omega_0}Ri^2(t)dt=RI_{MAX}^2\int_0^{2\pi/\omega_0}\cos^2(\omega_0)dt=\frac{\pi RI_{MAX}^2}{\omega_0}$$

d) $W_m=\dfrac{1}{2}Cu_c^2$ est maximale quand u_c maximale, soit quand $u_c=u_{c\max}=\dfrac{I_{\max}}{C\omega_0}$:

$W_{\max}=\dfrac{I_{\max}^2}{2C\omega_0^2}$.

e) On a : $Q=\dfrac{1}{RC\omega_0}=\dfrac{\pi I_{\max}^2}{\omega_0\Delta W}\times\dfrac{2\omega_0 W_{\max}}{I_{\max}^2}=2\pi\dfrac{W_{\max}}{\Delta W}$

PARTIE 2 : Le facteur de qualité en mécanique : Étude d'un oscillateur harmonique amorti

1. Bilan des forces :
   - Le poids : $\vec{P}=m\vec{g}$
   - La réaction de l'axe horizontal : $\vec{R}$
   - La tension du ressort : $\vec{T}=-k(\ell-\ell_0)\vec{e}_x=-kx\vec{e}_x$
   - La force de frottement : $\vec{f}=-h\vec{v}$: force non conservative (son travail est toujours résistant), le mouvement n'est donc pas conservatif.

   Comme le mouvement est horizontal on a : $\vec{P}+\vec{R}=\vec{0}$

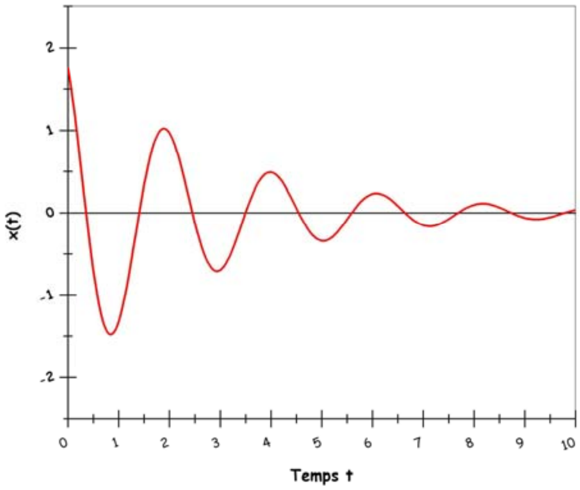
   - Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel galiléen : $\dfrac{d\mathcal{E}_c}{dt}=\mathcal{P}_{\vec{P}}+\mathcal{P}_{\vec{R}}+\mathcal{P}_{\vec{T}}+\mathcal{P}_{\vec{f}}$.

     Comme il n'y a pas de mouvement vertical, la puissance du poids et la puissance de la réaction de l'axe est nulle. Comme la tension du ressort est une force qui dérive d'une énergie potentielle ($\mathcal{E}_p=\dfrac{1}{2}kx^2$), la puissance de cette force peut être mise sous la forme : $\mathcal{P}_{\vec{T}}=-\dfrac{d\mathcal{E}_{p\vec{T}}}{dt}$. Ensuite : $\mathcal{P}_{\vec{f}}=\vec{f}\cdot\vec{v}=-h\vec{v}\cdot\vec{v}=-hv^2$. On a donc :

     $d\mathcal{E}_c+d\mathcal{E}_{p\vec{T}}=d\mathcal{E}_m=\mathcal{P}_{\vec{f}}=-hv^2dt$

2. PFD dans un référentiel galiléen : $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{R}+\vec{T}+\vec{f}$. En projetant sur l'axe horizontal :
   $m\ddot{x}=-kx-h\dot{x}$, soit : $\ddot{x}+\dfrac{h}{m}\dot{x}+\dfrac{k}{m}x=0$, qu'on peut écrire : $\ddot{x}+\dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x}+\omega_0^2x=0$, avec :
   $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, et $Q=\dfrac{m\omega_0}{h}=\dfrac{1}{h}\sqrt{km}$.

3.
   a) Pour obtenir le régime pseudo périodique, il faut que les racines de l'équation caractéristique associée à l' équation différentielle ci-dessus soient complexes, c'est-à-dire que le discriminant de l'équation caractéristique soit négatif :
   $\Delta=\dfrac{\omega_0^2}{Q^2}-4\omega_0^2=\omega_0^2\left(\dfrac{1}{Q^2}-4\right)<0$, soit : ($Q$ étant positif) : $Q>\dfrac{1}{2}$.



b) $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}=T_0\left(1-\dfrac{1}{4Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\simeq T_0\left(1+\dfrac{1}{8Q^2}\right)$. Donc : $\left|\dfrac{\Delta T}{T_0}\right|=\dfrac{1}{8Q^2}\ll 1$, donc

on peut prendre : $\omega\simeq\omega_0$, ou $T\simeq T_0$.

4.

a) La force de tension du ressort dérive d'une énergie potentielle. En effet, on a :

$\vec{T}=-kx\vec{e}_x=-\dfrac{d\mathcal{E}_p}{dx}\vec{e}_x$, avec : $\mathcal{E}_p(t)=\dfrac{1}{2}kx^2(t)$. Ici : $\mathcal{E}_p(t)=\dfrac{1}{2}kA^2e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}\cos^2(\omega_0 t+\varphi)$.

b) $\mathcal{E}_c(t)=\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2(t)$. Or : $\dot{x}(t)=Ae^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\cancel{-\dfrac{\omega_0}{2Q}\cos(\omega_0 t+\varphi)}-\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)\right)$. On néglige le premier terme car : $Q\gg 1$. Donc :

$\mathcal{E}_c(t)=\dfrac{1}{2}mA^2e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi)=\dfrac{1}{2}kA^2e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}\sin^2(\omega_0 t+\varphi)$.

c) On a donc : $\mathcal{E}_m(t)=\dfrac{1}{2}kA^2e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}\cos^2(\omega_0 t+\varphi)+\dfrac{1}{2}kA^2e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}\sin^2(\omega_0 t+\varphi)=\dfrac{1}{2}kA^2e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}$. On a donc : $\mathcal{E}_m(t)=K_1e^{-K_2t}$, avec : $K_1=\dfrac{1}{2}kA^2$, et : $K_2=\dfrac{\omega_0}{Q}$.

d) $\Delta\mathcal{E}_m=K_1e^{-K_2t}\left|e^{-K_2T}-1\right|$, d'où $\dfrac{\mathcal{E}_m}{\Delta\mathcal{E}_m}=\dfrac{1}{1-e^{-\frac{\omega_0}{Q}T}}\simeq\dfrac{1}{1-\left(1-\dfrac{\omega_0}{Q}T\right)}=\dfrac{Q}{2\pi}$ car ($T\simeq T_0$). On retrouve la même signification énergétique du facteur de qualité :

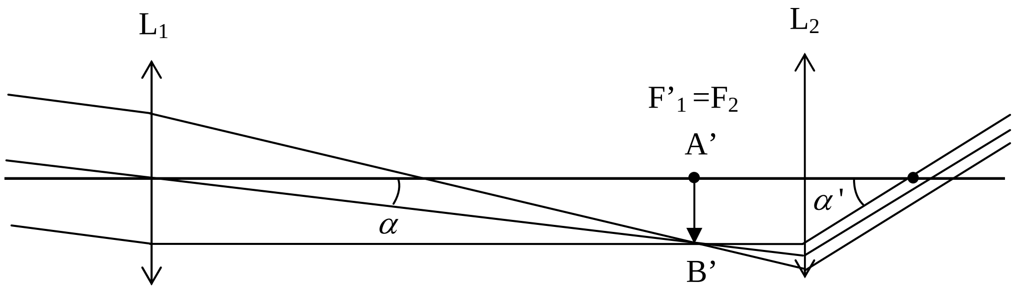
$$Q=2\pi\frac{\mathcal{E}_m(t)}{\Delta\mathcal{E}_m(t)}$$

PARTIE 3 : Le grossissement en optique : Étude d'une lunette astronomique

1.

a) L'image d'un objet situé à l'infini, se forme à l'infini. Le foyer image de L_1 coïncide avec le foyer objet de L_2 .

b)



c) On placera la pellicule au foyer image d'une lentille annexe.

2.

a) L'image est renversée.

b) On a : $\tan\alpha \simeq \alpha = \dfrac{\overline{A'B'}}{f_1'}$ et : $\tan\alpha' \approx \alpha' = \dfrac{\overline{A'B'}}{f_2'}$, donc : $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha} = \dfrac{f_1'}{f_2'} = 5$

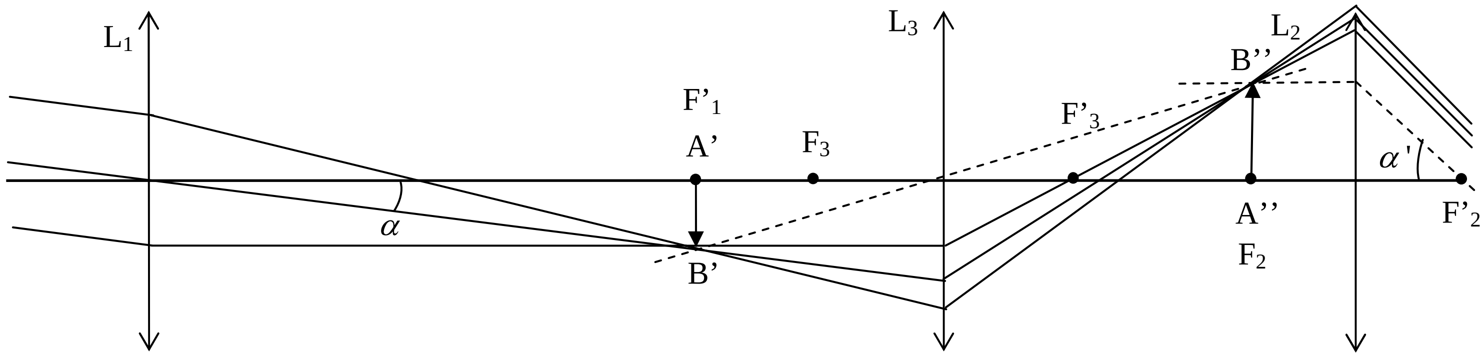
c) Le passage des rayons lumineux à travers la lentille fait intervenir la réfraction et donc l'indice du verre des lentilles. Celui-ci dépendant de la longueurs d'onde, les différentes couleurs ne sont pas déviées de la même façon et donc l'image est irisée et pas très nette. Un miroir ne fait pas intervenir la réfraction mais la réflexion.

3.

a) L'image par L_3 , de l'image de la planète par L_1 qui se trouve en F'_1 doit se former en F_2 afin que l'image par L_2 se forme à l'infini. L_3 doit donc conjuguer : F'_1 et F_2 .

b) Par définition : $\gamma_3 = \dfrac{\overline{O_3F_2}}{\overline{O_3F'_1}}$. On a également : $\dfrac{1}{\overline{O_3F_2}} - \dfrac{1}{\overline{O_3F'_1}} = \dfrac{1}{f'_3}$. De la première relation on tire : $\overline{O_3F_2} = \gamma_3 \times \overline{O_3F'_1}$, puis en remplaçant dans la relation de conjugaison : $\overline{O_3F'_1} = f'_3\left(\dfrac{1}{\gamma_3} - 1\right)$.

c)



d) Cette fois on a : $\tan\alpha \simeq \alpha = \dfrac{\overline{A'B'}}{f_1'}$ et $\tan\alpha' \simeq \alpha' = \dfrac{\overline{A"B"}}{f_2'}$, donc :

$G = \dfrac{\alpha'}{\alpha} = \dfrac{f_1'}{\overline{A'B'}} \times \dfrac{\overline{A"B"}}{f_2'} = \gamma_3 G$. Comme $\gamma_3 < -1$, $|G'| > |G|$ et de signe opposé, l'image est droite.