

Corrigé ENSTIM Epreuve spécifique

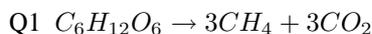
Emmanuel ANGOT et Anne-Emmanuelle BADEL

2008

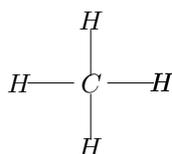
Nous remercions Catherine DUBAR pour sa relecture attentive de la partie chimie.

Partie A Etude du biogaz de décharge

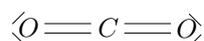
I Etude de la réaction de méthanation du glucose



Q2 structure de CH_4 :



structure de CO_2 :



Q3 CH_4 de type AX_4 donc tétraédrique et $\alpha = 109,5^\circ$

CO_2 de type AX_2 donc linéaire et $\alpha = 180^\circ$

II L'épuration du biogaz

1 Intérêt de l'élimination de l'eau

Q4 $[CO_{2(d)}] = K_{CO_2} \frac{P_{CO_2}}{P^0} C^0 = K_{CO_2} \frac{x_{CO_2} P}{P^0} C^0 = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$

Q5 $CO_{2(d)} + 2H_2O = HCO_3^- + H_3O^+$ donc $[HCO_3^-] = [H_3O^+] = x$

$$\text{et } Ka_1 = \frac{[HCO_3^-][H_3O^+]}{[CO_{2(d)}] C^0} = \frac{x^2}{[CO_{2(d)}] C^0}$$

$$pH = px = \frac{1}{2} (pKa_1 + pC^0 + p_{CO_2}) = 3,7$$

On vérifie $x \ll [CO_{2(d)}]$ et $x \gg 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$. Une autre manière de faire consiste à vérifier que $pH \leq pKa - 1$ et $pH \leq 7$, ce qui est le cas ici.

Q6 L'eau est acide compte tenu de la présence du dioxyde de carbone, elle risque d'augmenter la corrosion.

D'autre part, l'apport de carbonates risque de provoquer un entartrage en eau basique.

2 Elimination du sulfure d'hydrogène

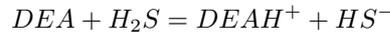
Q7 même raisonnement qu'en Q4 et $[H_2S_{(d)}] = K_{H_2S} \frac{x_{H_2S} P}{P^0} C^0 = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$

Q8 $H_2S + H_2O = HS^- + H_3O^+$ de constante Ka'_1

$DEA + H_2O = DEAH^+ + OH^-$ de constante $\frac{Ke}{Ka}$

Donc l'action de H_2S sur DEA est la somme des deux réactions précédentes, somme à laquelle on retranche la réaction d'autoprotolyse de l'eau de constante Ke .

Finalement on a



de constante $K^0 = \frac{Ka'_1}{Ka} = 1,0 \cdot 10^2$.

Q9 $K^0 \gg 1$ donc la réaction est quasi-totale et H_2S disparaît presque totalement.

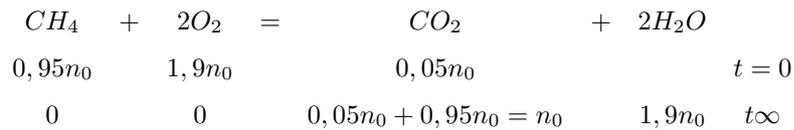
3 Combustion du biogaz

Q10 $CH_4 + 2O_2 = CO_2 + 2H_2O$

$\Delta_r H^0 = \Delta_f H^0(CO_2) + 2\Delta_f H^0(H_2O) - \Delta_f H^0(CH_4) - 2\Delta_f H^0(O_2)$ avec $\Delta_f H^0(O_2)$ nul car O_2 est un corps pur simple. Soit numériquement $\Delta_r H^0 = -760 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Q11 Pour n_0 moles de biogaz, on a $n_i = 0,95n_0$ moles de CH_4 et du fait des proportions stœchiométriques $2n_i$ moles de O_2 . En tenant compte de la composition de l'air, on a $8n_i$ moles de N_2 . Finalement la composition initiale est $0,95n_0$ de CH_4 ; $1,9n_0$ de O_2 ; $7,6n_0$ de N_2 et $0,05n_0$ de CO_2 .

Le tableau d'avancement est le suivant :



Après la combustion, on a n_0 de CO_2 ; $1,9n_0$ de H_2O et $7,6n_0$ de N_2 .

Q12 Le bilan énergétique s'écrit

$$\xi \Delta_r H^0 + n_0 [C_p(CO_2) + 1,9C_p(H_2O) + 7,6C_p(N_2)] (T_f - T_i) = 0$$

avec $\xi = 0,95n_0$. On en déduit $T_f = T_i - \frac{0,95\Delta_r H^0}{C_p(CO_2) + 1,9C_p(H_2O) + 7,6C_p(N_2)}$.

Q13 Application numérique : $T_f = 2490 \text{ K}$.

Partie B Production du bioéthanol à partir de disaccharides

I La molécule de glucose

1 Etude de la forme linéaire du glucose

Q14 $CH_2OH - C^*HOH - C^*HOH - C^*HOH - C^*HOH - CHO$

Q15 On a quatre carbones asymétriques donc au maximum $2^4 = 16$ stéréoisomères.

Comme il n'y a pas d'éléments de symétries, on a exactement 16 stéréoisomères.

Deux diastéréoisomères sont des stéréoisomères qui ne sont pas énantiomères c'est-à-dire qui ne sont pas images l'un de l'autre dans un miroir.

2 Etude d'un des deux stéréoisomères cycliques du glucose

Q16 On commence par remarquer qu'on a 4 carbones asymétriques dans la forme ouverte et qu'on en a 5 dans l' α -glucose.

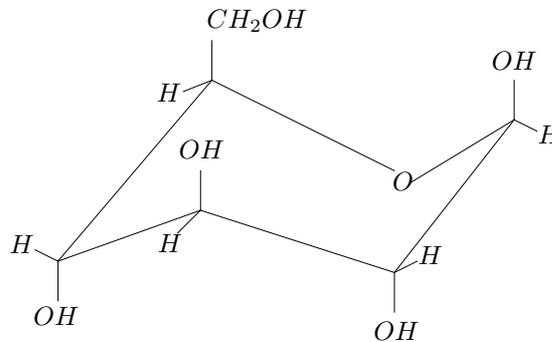
Pour C_1^* , l'ordre de priorité est $O > OH > C_2 > H$. En regardant dans l'axe CH , on tourne dans le sens horaire : la configuration est de type R .

Pour C_2^* , l'ordre de priorité est $OH > C_1 > C_3 > H$. En regardant dans l'axe CH , on tourne dans le sens horaire : la configuration est de type R .

Pour C_3^* , l'ordre de priorité est $OH > C_2 > C_4 > H$. En regardant dans l'axe CH , on tourne dans le sens horaire : la configuration est de type R .

Pour C_4^* , l'ordre de priorité est $OH > C_5 > C_3 > H$. En regardant dans l'axe CH , on tourne dans le sens trigonométrique : la configuration est de type S .

Pour C_5^* , l'ordre de priorité est $O > C_4 > C_6 > H$. En regardant dans l'axe CH , on tourne dans le sens horaire : la configuration est de type R .

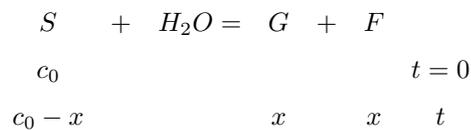


Q17 La conformation proposée dans l'énoncé semble la plus stable du fait de la présence des substituants les plus gros en position équatoriale.

3 Etude de la réaction d'inversion

Q18 $\alpha = [\alpha]_G lC_G + [\alpha]_F lC_F + [\alpha]_S lC_S$

Q19 La réaction est



en notant x la concentration (exprimée en mol.L⁻¹) en G ou F donc

$$v = \frac{dx}{dt} = k(c_0 - x)$$

Q20 $c_i = \frac{n}{V} = \frac{m}{MV} = \frac{C_i}{M}$ soit $c_S = \frac{C_S}{M_S}$, $c_G = \frac{C_G}{M_{FG}}$ et $c_F = \frac{C_F}{M_{FG}}$

Q21 D'après la question Q20, on a l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} + kx = kc_0$ dont la solution s'écrit $x = c_0 + Ke^{-kt}$ où K désigne une constante. On la détermine à partir des conditions initiales $x = 0 = c_0 + K$ soit $K = -c_0$ et $x = c_G = c_F = c_0(1 - e^{-kt})$. On reporte dans l'expression de la question Q18

$$\alpha_t = [\alpha]_G lM_{FG}c_0(1 - e^{-kt}) + [\alpha]_F lM_{FG}c_0(1 - e^{-kt}) + [\alpha]_S lM_S c_0 e^{-kt}$$

Pour un temps infini, on en déduit

$$\alpha_\infty = lM_{FG}c_0([\alpha]_G + [\alpha]_F)$$

et pour l'instant initial $t = 0$

$$\alpha_0 = [\alpha]_S l c_0 M_S$$

Cela permet d'écrire

$$\alpha_t = \alpha_\infty(1 - e^{-kt}) + \alpha_0 e^{-kt}$$

soit $\ln \frac{\alpha_t - \alpha_\infty}{\alpha_0 - \alpha_\infty} = -kt$ ou

$$\ln \frac{\alpha_\infty - \alpha_0}{\alpha_\infty - \alpha_t} = kt$$

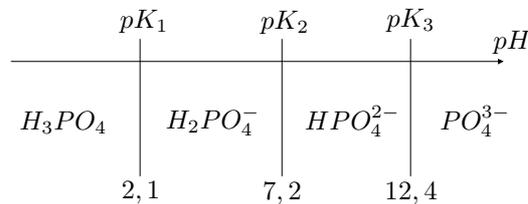
II Etude de la fermentation du glucose

1 Préparation du tampon phosphate

Q22 Il faut une même quantité de phosphate que d'hydrogénophosphate soit $n = 0,10$ mole pour un volume $V = 1,0$ L. Or $m_1 = M_1 n$ avec $M_1 = 336 \text{ g.mol}^{-1}$ donc la masse à introduire est $m_1 = 33,6$ g.

Q23 Le pH initial est celui de l'ampholyte soit $pH = \frac{1}{2}(pK_1 + pK_2) = 4,8$.

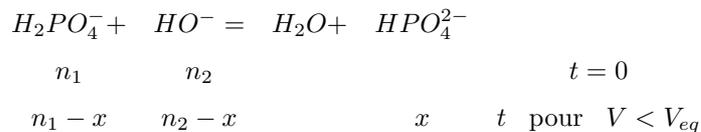
L'échelle des pH est la suivante :



On impose $pH = 6,2 = pK_2 - 1$ donc l'espèce prédominante est $H_2PO_4^-$ et du fait du faible écart par rapport à la zone de prédominance de HPO_4^{2-} , l'espèce HPO_4^{2-} sera aussi présente. On a en effet $\frac{[HPO_4^{2-}]}{[H_2PO_4^-]} = 0,10$.

Q24 $H_2PO_4^- + HO^- = H_2O + HPO_4^{2-}$ dont la constante est $K = \frac{K_2}{K_e} = 10^{6,8} \gg 1$ donc la réaction est quantitative.

Q25 Le tableau d'avancement est



donc $[H_2PO_4^-] = \frac{n_1 - n_2}{V}$ et $[HPO_4^{2-}] = \frac{n_2}{V}$.

La soude est en défaut : d'après Q23, il y a moins de soude que de dihydrogénophosphate $H_2PO_4^-$ lorsque $H_2PO_4^-$ est prédominant.

Q26 $K_2 = \frac{[HPO_4^{2-}][H_3O^+]}{[H_2PO_4^-]C^0} = \frac{n_2[H_3O^+]}{(n_1 - n_2)C^0}$ dont on tire $[H_3O^+] = C^0 \frac{K_2(n_1 - n_2)}{n_2}$
 et $pH = -\log_{10} \frac{K_2(n_1 - n_2)}{n_2}$

Q27 On en déduit $n_2 10^{-pH} = n_1 K_2 - n_2 K_2$ et $n_2 = \frac{n_1 K_2}{10^{-pH} + K_2} = 0,97.10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

Par conséquent, on a $m_2 = n_2 M_2 = 0,36$ g.

2 Etude théorique de la catalyse enzymatique

Q28 $v = \frac{d[P]}{dt} = k_2 [ES]$

Q29 Par la conservation de la matière pour l'enzyme $[E]_0 = [E] + [ES]$

Q30 L'approximation des états quasi-stationnaires s'écrit pour le composé ES :

$$\frac{d[ES]}{dt} = k_1 [E] [S] - k_{-1} [ES] - k_2 [ES] = 0$$

soit $[ES] = \frac{k_1 [E] [S]}{k_2 + k_{-1}} = \frac{k_1 [S] ([E]_0 - [ES])}{k_2 + k_{-1}}$ qu'on peut mettre sous la forme

$$[ES] = \frac{k_1 [S] [E]_0}{k_2 + k_{-1} + k_1 [S]}$$

Q31 On en déduit $v = k_2 \frac{[S] [E]_0}{K_M + [S]}$ avec $K_M = \frac{k_2 + k_{-1}}{k_1}$ la constante de Michaelis. On remarque que cette constante s'exprime en mol.L^{-1} .

Q32 Plutôt que d'étudier l'expression de la vitesse v comme une fonction de $x = [S]$, on préfère remarquer que $[S] + K_M > [S]$ donc $v < k_2 \frac{[S] [E]_0}{[S]} = v_{max}$.

Q33 L'inverse de la vitesse se met sous la forme $\frac{1}{v} = \frac{K_M + [S]}{k_2 [S] [E]_0} = \frac{1}{k_2 [E]_0} + \frac{K_M}{[S]}$.

Il s'agit donc d'une droite en fonction de $\frac{1}{[S]}$ de pente $\frac{K_M}{k_2}$ et d'ordonnée à l'origine $\frac{1}{v_{max}}$.

Q34 On peut donc écrire $\frac{1}{v} = \frac{1}{v_{max}} + \frac{K_M}{v_{max} [S]}$ soit en multipliant par $v v_{max}$, on en déduit $v_{max} = v + \frac{K_M v}{[S]}$ et $v = v_{max} - \frac{K_M v}{[S]}$. La fonction v en fonction de $\frac{v}{[S]}$ admet une droite comme courbe représentative.

3 Etude expérimentale

Q35 On mesure la concentration pour différents instants après avoir effectué une trempe chimique pour bloquer la réaction avant de réaliser le dosage. On trace la tangente à l'origine pour déterminer la vitesse initiale v_0 qui est la pente de cette droite.

Q36 D'après les résultats de la partie B.II.2, l'ordonnée à l'origine de la courbe $\frac{1}{v_0}$ en fonction de $\frac{1}{c_0}$ est l'inverse de la vitesse maximale. On peut en déduire la valeur de la

$$\text{vitesse maximale } v_{max} = \frac{1}{185} = 5,4 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}.$$

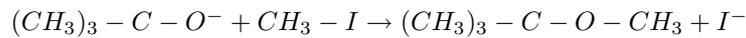
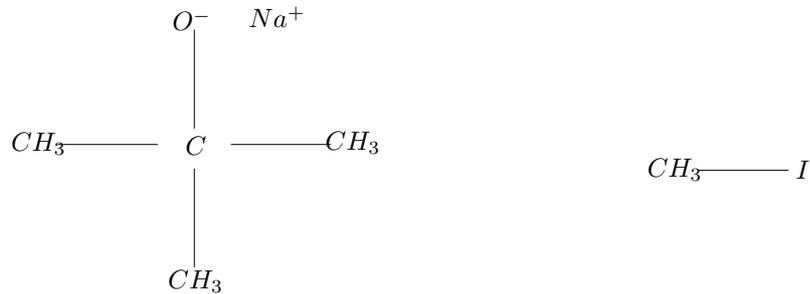
La pente est égale à $\frac{K_M}{v_{max}} = 3,83$ soit $K_M = 0,021$ dans les unités du système international.

Q37 Par la deuxième méthode, on trouve $v_{max} = 5,57 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ainsi que la constante $K_M = 22,1 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$. On a un bon accord entre les deux méthodes.

Partie C Utilisation des bioalcools

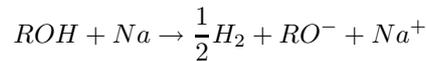
I Synthèse de composés oxygénés de l'essence

Q38 Les réactifs de la synthèse du MTBE admettent les formules semi-développées suivantes :

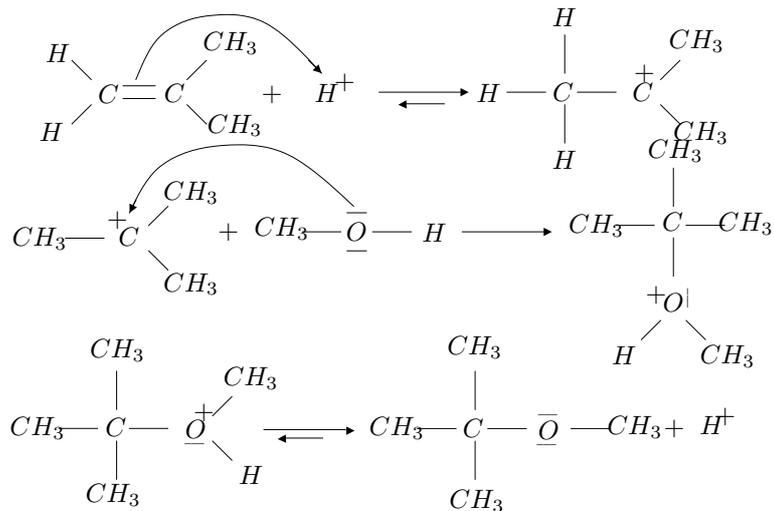


Q39 Il s'agit de la synthèse de Williamson dont le mécanisme est de type SN2 car $CH_3 - I$ est un composé à carbone primaire.

Q40 L'alcoolate n'existant pas en milieu aqueux, on utilise la réaction



Q41 $CH_2 = C - (CH_3)_2 + CH_3 - OH \rightarrow (CH_3)_3 - C - O - CH_3$



Q42 H^+ est restitué en fin de réaction et intervient dans son mécanisme : c'est donc un catalyseur.

Q43 La manipulation du sodium est délicate du fait de son inflammabilité à l'eau.

II Piles à combustible à méthanol direct

Q44 $CH_3OH + H_2O = CO_2 + 6e^- + 6H^+$.

Le potentiel de Nernst s'écrit $E_1 = E_1^0 + \frac{e^0}{6} \log \frac{P_{CO_2} [H_3O^+]^6}{P^0 (C^0)^6 x_{CH_3OH} x_{H_2O}}$.

Q45 $\frac{1}{2}O_2 + 2e^- + 2H^+ = H_2O$.

Le potentiel de Nernst s'écrit $E_2 = E_2^0 + \frac{e^0}{2} \log \sqrt{\frac{P_{O_2} [H_3O^+]^2}{P^0 (C^0)^2}}$.

Q46 Le méthanol est réducteur et est oxydé tandis que le dioxygène est réduit. On a donc la borne négative du côté du méthanol et la force électromotrice vaut $e = E_2 - E_1$.

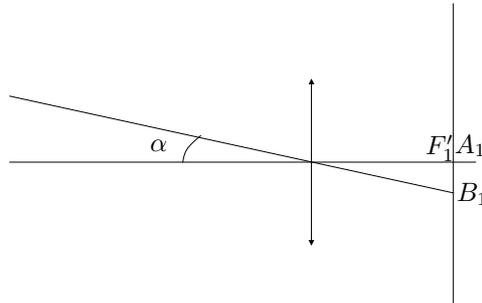
- Q47 En fonctionnement générateur, la cathode est le siège d'une réduction, c'est la borne positive tandis que l'anode est le siège d'une oxydation, c'est la borne négative.
On a donc la réaction $2CH_3OH + 3O_2 = 4H_2O + 2CO_2$.
- Q48 La densité du méthanol est de 0,8 donc dans 10 mL on a 8,0 g de méthanol soit une quantité $n_0 = \frac{m}{M} = 0,25$ mol. Par conséquent, on a donc une quantité d'électricité $Q = \eta_6 n_0 10^5 = 120$ kC.
- Q49 Par définition de l'intensité, on a $I = \frac{Q}{T}$ soit $T = \frac{Q}{I} = 3$ h 20 min. On a donc plus de 3 h d'autonomie.

Première Partie Observation des anneaux de Saturne

1. Observation de Saturne avec une lunette afocale

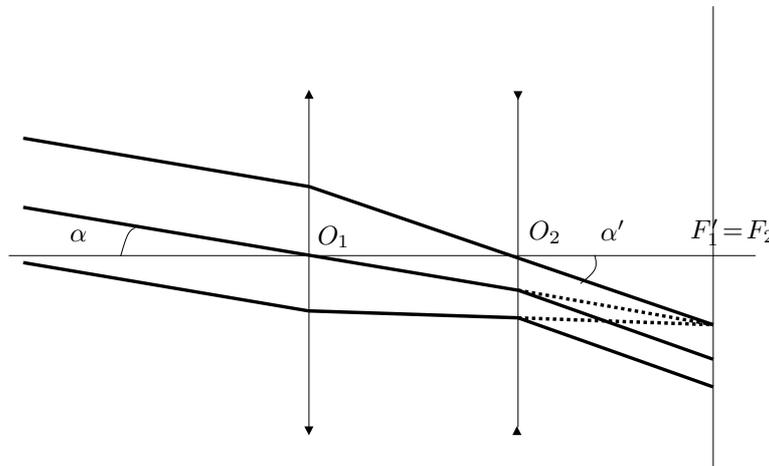
Q1 $\tan \alpha = \frac{R_A}{D} \approx \alpha = 6,7 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$

Q2 L'image se forme dans le plan focal image de la première lentille puisque l'objet est à l'infini.



L'image est réelle pour l'objectif et c'est un objet virtuel pour l'oculaire.

Q3 $A_1 B_1$ se trouve dans le plan focal image de la première lentille qui est aussi le plan focal objet de la seconde donc l'image $A' B'$ est à l'infini.



Le système est afocal puisque un objet à l'infini a une image à l'infini et que donc les rayons qui arrivent parallèles ressortent parallèles.

Q4 $\tan \alpha = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{O_1 A_1}} \approx \alpha$ et $\tan \alpha' = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{O_2 A_1}} \approx \alpha'$ avec $\overline{O_1 A_1} = f'_1$ et $\overline{O_2 A_1} = -f'_2$. On en déduit $G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_1}{f'_2} = 5$.

Q5 Sans lunette, l'angle de vision est $\alpha = 6,7 \cdot 10^{-5} < \alpha_0$ et on ne distingue pas les anneaux. En revanche, avec lunette, l'angle devient $\alpha' = G\alpha = 3 \cdot 10^{-4} > \alpha_0$ et on distingue les anneaux.

Q6 $\overline{A''B''} = f' \tan \alpha' = -6,0 \mu\text{m}$. On a donc trois pixels d'écart entre la planète et l'anneau.

2 Etude des cellules de l'appareil de prises de vue numérique

Q7 L'étage 1 peut fonctionner en régime linéaire du fait de la rétroaction sur l'entrée inverseuse tandis que l'étage 2 est en régime saturé du fait de la rétroaction sur l'entrée non inverseuse.

Q8 $E^+ = U_e$ et $E^- = \frac{R_0}{R + R_0} U'_e$ en appliquant la relation du pont diviseur de tension. En supposant que l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire (ce qui est possible avec les arguments de la question précédente), on a $\epsilon = E^+ - E^- = 0$ du fait du caractère idéal de l'amplificateur opérationnel. Par conséquent, on a $U'_e = \left(1 + \frac{R}{R_0}\right) U_e$.

Q9 Ce montage est appelé amplificateur non inverseur puisque le gain est positif et que la sortie est proportionnelle à l'entrée.

Q10 Pour un maximum de 0,050 V, on veut 10 V soit un gain de $\frac{10}{0,050} = 200$. On en déduit que $R = 199R_0$ et $R_0 = 250 \Omega$.

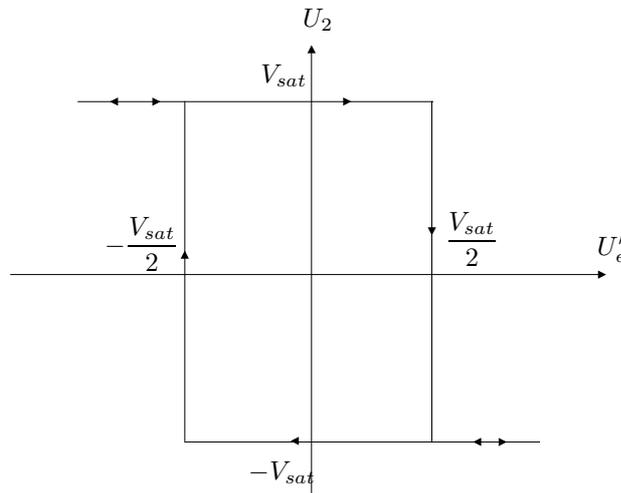
Q11 En appliquant la relation du pont diviseur de tension, on a $U_1 = \frac{R}{R + R} U_2 = \frac{U_2}{2}$.

Q12 D'après ce qui a été dit à la question Q7, l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime saturé.

Si $U_2 = V_{sat}$, on a $U_1 = \frac{V_{sat}}{2}$, ce qui n'est possible que pour $\epsilon = \frac{V_{sat}}{2} - U'_e > 0$ c'est-à-dire pour $U'_e < \frac{V_{sat}}{2}$.

Si $U_2 = -V_{sat}$, on a $U_1 = -\frac{V_{sat}}{2}$, ce qui n'est possible que pour $\epsilon = -\frac{V_{sat}}{2} - U'_e < 0$ c'est-à-dire pour $U'_e > -\frac{V_{sat}}{2}$.

On en déduit la courbe :



Q13 Ce montage est un comparateur à hystérésis.

Q14 Si $U_e = 0,0 \text{ V}$, on a $U'_e = 0,0 \text{ V}$. On suppose en outre que $U_2 = -V_{sat}$. Si le cellule reçoit moins de lumière que le seuil soit $U'_e > -\frac{V_{sat}}{2}$, le comparateur reste bloqué et ne bascule jamais sur V_{sat} . Si au contraire, U'_e dépasse le seuil à savoir $U'_e < -\frac{V_{sat}}{2}$, la tension de

sortie du comparateur bascule sur V_{sat} puis quand la cellule revient à zéro, il n'y a pas de basculement et la sortie du comparateur reste à la tension V_{sat} .

Q15 Il s'agit du montage suiveur.

Q16 Si $U_2 = -15$ V, la diode est bloquée et $E^+ = 0, 0$ V donc $U_s = 0, 0$ V.

Si $U_2 = 15$ V, la diode est passante et $E^+ = 15$ V donc par le montage suiveur $U_s = 15$ V.

Deuxième partie Etude dynamique des anneaux de Saturne

1. Les anneaux de Saturne ne sont pas des solides

Q17 Soit le système constitué du doublet étudié dans le référentiel \mathcal{R}_{sd} non galiléen. Le bilan des forces est l'attraction de Saturne $-\frac{\mathcal{G}m_S m}{r^2} \vec{u}_r$ et la force d'inertie d'entraînement $m\omega^2 r \vec{u}_r$ car la force de Coriolis est nulle du fait que la vitesse relative est nulle. En écrivant que la somme des forces est nulle, on a la relation $m\omega^2 r \vec{u}_r - \frac{\mathcal{G}m_S m}{r^2} \vec{u}_r = \vec{0}$ soit $\omega^2 r = \frac{\mathcal{G}m_S}{r^2}$.

Q18 Les forces subies par M_1 sont l'attraction de Saturne $-\frac{\mathcal{G}m_S m}{(r-a)^2} \vec{u}_r$, l'attraction de M_2 $\frac{\mathcal{G}m^2}{4a^2} \vec{u}_r$ et la force d'inertie d'entraînement $m\omega^2 (r-a) \vec{u}_r$. Comme à la question précédente, la force de Coriolis est nulle du fait que la vitesse relative est nulle. On en déduit l'expression de la résultante des forces

$$\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}m_S m}{(r-a)^2} \vec{u}_r + \frac{\mathcal{G}m^2}{4a^2} \vec{u}_r + m\omega^2 (r-a) \vec{u}_r$$

Or $\omega^2 = \frac{\mathcal{G}m_S}{r^3}$. On en déduit donc $\vec{F} = f(r, a) \vec{u}_r$ avec

$$f(r, a) = \frac{\mathcal{G}m^2}{4a^2} + \frac{\mathcal{G}m_S m (r-a)}{r^3} - \frac{\mathcal{G}m_S m}{(r-a)^2}$$

Q19 En utilisant le développement limité proposé pour $f(r, a)$, la condition $f(r, a) < 0$ se traduit par $\frac{\mathcal{G}m^2}{4a^2} < \frac{3\mathcal{G}m_S m a}{r^3}$ soit $r^3 < \frac{12m_S a^3}{m} = 12 \frac{m_S}{\mu}$ avec $\mu = \frac{m}{a^3}$. L'application numérique donne $r_0 = \sqrt[3]{\frac{12m_S}{\mu}} = 2, 0.10^8$ m. La valeur de r_0 est juste à la limite de Roche donc il y a dislocation. On a le bon ordre de grandeur.

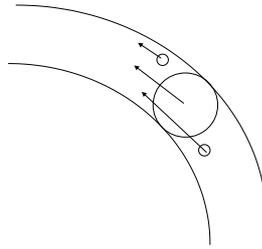
2. Divisions des anneaux

Q20 L'application du principe fondamental donne $m \vec{a} = -\frac{\mathcal{G}m_S m}{r^2} \vec{u}_r$ avec $\vec{a} = -\frac{v^2}{r} \vec{u}_r$. On

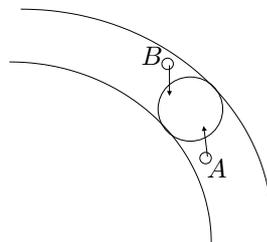
en déduit $v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_S}{r}}$.

Par conséquent, si le rayon r augmente, la vitesse v diminue.

Q21 On obtient le schéma suivant :



Q22 On obtient le schéma suivant :



Q23 *A* et *B* vont dans le même sens mais *B* est freiné par l'anneau puisque le vecteur vitesse dans \mathcal{R} est opposé à la force tandis que *A* est accéléré par l'anneau puisque le vecteur vitesse dans \mathcal{R} est dans le même sens que la force. Par conséquent, la vitesse de *B* diminue et le rayon de sa trajectoire augmente tandis que la vitesse de *A* augmente et le rayon de sa trajectoire diminue. *A* et *B* rejoignent la bande dont le passage provoque un nettoyage.

Troisième Partie L'atmosphère de Titan

Q24 L'équation de la statique des fluides donne $\frac{dP}{dz} = -\rho g$ avec $\rho = \frac{m}{V} = \frac{MP}{RT}$. On en déduit $\frac{dP}{dz} = -\frac{Mg}{RT}P$.

Q25 Comme $\frac{Mg}{RT}$ est constant, on obtient par intégration $\ln P = -\frac{Mg}{RT}z + K$ où K est une constante. C'est incompatible car il y a modification du type d'évolution sur le graphique proposé.

Q26 En supposant que la transformation est adiabatique et réversible, on peut utiliser la relation de Laplace PV^γ constant ou $P\rho^{-\gamma}$ constant car ρ est inversement proportionnelle à V . On en déduit $\rho = \left(\frac{P_0}{P}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \mu_0$.

En reportant dans l'équation de la statique, on obtient $P^{-\frac{1}{\gamma}} dP = -\mu_0 P_0^{-\frac{1}{\gamma}} g dz$. En intégrant, on a $\frac{\gamma}{\gamma-1} \left(P(z)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - P(0)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) = -\mu_0 P_0^{-\frac{1}{\gamma}} g z$.

En prenant $P(z) = 0$, on a $\frac{\gamma}{\gamma-1} P_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \mu_0 P_0^{-\frac{1}{\gamma}} g z$. On en déduit $\frac{\gamma}{\gamma-1} P_0 = \mu_0 g z_0$ soit $z_0 = \frac{P_0 \gamma}{\mu_0 (\gamma-1) g}$. Or $P_0 V_0 = nRT_0$ donc $\mu_0 = \frac{m}{V_0} = \frac{P_0 M}{RT_0}$ et $\frac{P_0}{\mu_0} = \frac{RT_0}{M}$. On a finalement

$z_0 = \frac{\gamma RT_0}{(\gamma-1) Mg} \approx 65 \text{ km}$. Cette valeur correspond au prolongement de la partie troposphère en $T = 0$ mais on ne trouve pas une pression nulle. Dans le modèle, si la pression s'annule, la température s'annule, ce qui n'est pas le cas ici. Que peut-on en conclure ?

L'application de la relation de Laplace conduit à une température fonction linéaire en z donc le modèle semble valable si on ne s'attache qu'au type de variations.