Chapitre 3 : Fonctions élémentaires

Plan

1 Vocabulaire concernant les applications.

On considère E et F 2 ensembles.

Rappelons qu'une application :

$$f \begin{cases} E \to F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

définit pour tout $x \in E$, un élément $f(x)$ dans F.

Si $y = f(x)$ avec $y \in B$ et $x \in A$ alors ont dit que y est **l'image** de x et que x est **un antécédent de** y.
L'ensemble des application de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E.

Si A est une partie de E alors

$$f(A) = \{f(x)/x \in A\}$$

Si A et B sont des parties de E :

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

Attention avec l'intersection !

Si B est une partie de F alors

$$f^{-1}(B) = \{x/f(x) \in E\}$$

Si A et B sont des parties de E :

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

Si A est une partie de E, alors on peut considérer la restriction $f|_A$ de f à A :

$$f|_A \begin{cases} A \to F \\ x \mapsto f|_A(x) = f(x) \end{cases}$$

Si une application f est la restriction d'une application g alors on dit que g est un **prolongement** de f.

Si A est une partie de d'un ensemble E alors on considère sa **fonction indicatrice** $\mathbb{1}_A$:

$$\mathbb{1}_A \begin{cases} E \to \{0,1\} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) = 1 \text{ si } x \in A \\ f(x) = 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{cases}$$

Si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont deux applications avec A, B, C des ensembles, on peut définir leur **composée** :

$$g \circ f \begin{cases} A \to C \\ x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x)) \end{cases}$$

Définition 1 *Soit $f : A \to B$ une application.*

- *Si tout élément de B a au moins un antécédent, ou de manière équivalente si $f(A) = B$:*
$$(\forall y \in B)\ (\exists x \in A)\ f(x) = y$$
on dit que l'application f est ***surjective***
- *Si tout élément de B a au plus un antécédent, ou de manière équivalente si :*
$$(\forall x \in A)\ (\exists x' \in A)\ f(x) = f(x') \implies x = x'$$
on dit que l'application f est ***injective***
- *Si f est à la fois injective et surjective ou de manière équivalente quand tout élément de B a un antécédent et un seul :*
$$(\forall\ y \in B)\ (\exists!\ x \in A)\ f(x) = y$$

Dans le cas où f est bijective, on définit sa **réciproque** f^{-1} par la relation :

$$(\forall y \in B)\ (\forall x \in A) \qquad f(x) = y \iff y = f^{-1}(x)$$

Autrement dit :

$$f \begin{cases} A \to B \\ x \mapsto f(x) = y \end{cases} \qquad f^{-1} \begin{cases} B \to A \\ y \mapsto f^{-1}(y) = x \text{ avec } f(x) = y \end{cases}$$

Les 2 notations f^{-1} sont compatibles dans le cas où f est bijective, en particulier, si $y \in B$:

$$f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$$

Propriété 1 *Si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont deux applications avec A, B, C des ensembles :*

- *Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.*
- *Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.*
- *Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et dans ce cas :*
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

2 Vocabulaire concernant les fonctions réelles

On considère une fonction f (application définie sur une partie) définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ (souvent un intervalle) à valeurs réelles :

$$f \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

f est dite :

- **constante** quand, pour tout x, y dans E : $f(x) = f(y)$.
- **croissante** quand, pour tout x, y dans E : si $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$.
- **décroissante** quand, pour tout x, y dans E : si $x \leq y$ alors $f(x) \geq f(y)$.
- **strictement croissante** quand, pour tout x, y dans E : si $x < y$ alors $f(x) < f(y)$.
- **strictement décroissante** quand, pour tout x, y dans E : si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.

Quand, pour tout x de E, si $x \in E$ alors $-x \in E$ alors f est dite :

- **paire** quand, pour tout x dans E :

$$f(-x) = f(x)$$

- **impaire** quand, pour tout x dans E :

$$f(-x) = -f(x)$$

Soit T réel. Quand, pour tout x de E, si $x \in E$ alors $x + T \in E$ alors f est dite T-**périodique** ou **périodique de période** T quand : pour tout x dans E :

$$f(x) = f(x + T)$$

Une fonction est dite **périodique** quand elle admet au moins une période non nulle.

Attention beaucoup de fonctions réelles ne sont ni paires, ni impaires, ni périodique.

f est dite :

- **majorée** (par M) quand : il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) \leq M$.
- **minorée** (par M) quand : il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) \geq M$.
- **bornée** quand : il existe $M \in \mathbb{R}$, $M' \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $M \leq f(x) \leq M'$.

La fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Définition 2 *la fonction f*

$$f \begin{cases} E \to F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

est une bijection quand :

$$\forall y \in F \quad \exists! x \in E : f(x) = y$$

On peut alors considérer sa réciproque :

$$g = f^{-1} \begin{cases} F \to E \\ y \mapsto f^{-1}(y) = x \qquad \textit{avec} \qquad f(x) = y \end{cases}$$

On a dans ces conditions :

$$\forall x \in E : g(f(x)) = x$$
$$\forall y \in F : f(g(y)) = y$$

3 Quelques rappels sur la dérivation

On considère une fonction f définie (au voisinage) d'un point a. Si la fonction f est **dérivable** en a de dérivée $f'(a)$ la courbe $\mathcal{C}_f$ a une tangente : la droite T_a de pente $f'(a)$ passant par le point $(a, f(a))$ c'est à dire d'équation :

$$T_a : y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Quelques règles de dérivation de base :f et g sont 2 fonctions définies et dérivables sur un intervalle $I \ni x$, dérivables et a est une constante, à connaitre mais surtout à savoir utiliser :

Expression	Dérivée	Condition de validité
$f(x) \times g(x)$	$f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$	
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{g^2(x)}$	$g(x) \neq 0$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$	
$a.f(x)$	$a.f'(x)$	
$f(ax + b)$	$af'(ax + b)$	
$f^2(x)$	$2f'(x).f(x)$	
$\frac{1}{f(x)}$	$\frac{-f'(x)}{f^2(x)}$	$f(x) \neq 0$
$f(g(x))$	$g'(x) \cdot f'(g(x))$	

Concernant la dernière formule (dérivée d'une fonction composée), on peut aussi la retenir sous la forme très pratique suivante : pour $x \in I$:

$$\frac{\mathrm{d}(f(g(x)))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y} \qquad \text{avec :} \quad g(x) = y$$

Voire la notation différentielle : pour $x \in I$:
Si $y = g(x)$, $\mathrm{d}y = g'(x)\,\mathrm{d}x$, ou $\mathrm{d}g(x) = g'(x)\,\mathrm{d}x$ et du coup :

$$\mathrm{d}(f(g(x)) = \mathrm{d}(f(y)) = f'(y)\,\mathrm{d}y = f'(y)g'(x)\,\mathrm{d}x = f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$$

On rappelle que sur un intervalle I une fonction dérivable est :

- constante si et seulement si $f' = 0$.
- croissante si et seulement si $f' \geq 0$.
- décroissante si et seulement si $f' \leq 0$.
- Si $f' > 0$ alors f est strictement croissante sur I (réciproque fausse !).
- Si $f' < 0$ alors f est strictement décroissante sur I (réciproque fausse !).

Ce qui permet de remplir le **tableau de variation** d'une fonction f.

Rappel : les flèches obliques dans un tableau de variations traduisent des fonctions continues et strictement monotones sur les intervalles considérés.

Sans le justifier complètement ici, on utilisera dans ce chapitre le résultat suivant :

Théorème 1 (Théorème de la bijection dérivable) *Si la fonction f est dérivable donc continue avec $f' > 0$ sur un intervalle $I = [a, b]$ alors :*

$$f \begin{cases} I \to f(I) \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

définit une bijection de réciproque

$$g = f^{-1} \begin{cases} f(I) \to I \\ y \mapsto f^{-1}(y) = x \qquad \textit{avec} \qquad f(x) = y \end{cases}$$

C'est à dire, que pour tout $y \in f(I)$, le problème :

$$f(x) = y$$

a une et une seulement solution qu'on note $f^{-1}(x)$.

On a du coup : si $x \in I$: $f^{-1}(f(x)) = x$
Si $y \in f(I)$: $f(f^{-1}(y)) = y$.

Les graphiques de f et $g = f^{-1}$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$ et on a pour $x \in I$:

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

ou si on note $y = f(x)$:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

En termes de tableaux de variations :

x	a		b
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$

x	$f(a)$		$f(b)$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	a	$\nearrow$	b

4 Fonctions valeur absolue

Si x est réel positif alors $|x| = x$ et s'il est négatif alors $|x| = -x$. On obtient ainsi une fonction **valeur absolue** définie sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\text{abs}'(x)$		-1	$\Vert$	$+1$	
$\text{abs}(x) = \lvert x \rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5 Fonctions exponentielles et logarithmes

5.1 Fonction exp

Rappelons que la **fonction exponentielle**

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^* \\ x \to \exp(x) = e^x \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifie :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; \exp'(x) = \frac{\mathrm{d}(\exp(x))}{\mathrm{d}x} = \exp(x)$$

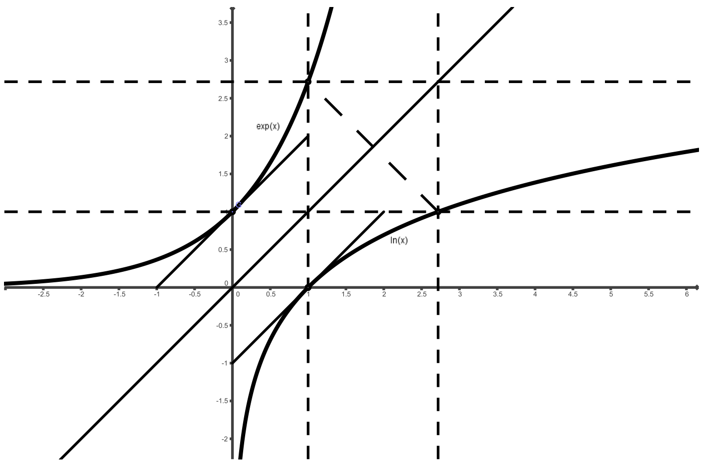
ainsi que l'équation fonctionnelle fondamentale :

$$\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right) \;\; \exp(x+y) = e^{x+y} = \exp(x)\exp(y) = e^x e^y$$

d'où se déduisent les formules (x et y sont des réels, n est un entier éventuellement relatif) :

$$\begin{array}{rcl} \exp(nx) & = & (\exp(x))^n \\ \exp(-x) & = & \dfrac{1}{\exp(x)} \\ \exp(x-y) & = & \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)} \\ \exp(1) & = & e \;\approx\; 2,71 \end{array}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x) = \exp(x)$	$+$	1	$+$
$\exp(x)$	0 $\nearrow$	1 $\nearrow$	$+\infty$



On rappelle les limites et propriétés classiques :

Si x est réel : $e^x \geq x+1$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$$

5.2 Application à l'équation différentielle : $y' = ay$.

On fixe ici $x_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

Théorème 2 (Equation différentielle $y' = ay$) *La fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ satisfait l'équation différentielle :*

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R} : f'(t) = af(t) \\ f(0) = x_0 \end{cases}$$

si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad : \quad f(t) = x_0 \exp(at)$$

5.3 Fonction ln

La fonction **logarithme népérien** :

$$\ln : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R} \\ x \to \ln(x) \end{cases}$$

est déterminée par le fait que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\exp(\ln(x)) = x$$

ou de manière équivalente, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln(\exp(x)) = x$$

La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

ainsi que l'équation fonctionnelle fondamentale :

$$\big(\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2\big) \;\; \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

d'où se déduisent les formules (x et y sont des réels strictement positifs, n est un entier éventuellement relatif) :

$$\begin{aligned} \ln(x^n) &= n \ln(x) \\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) &= -\ln(x) \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) &= \ln(x) - \ln(y) \\ \ln(e) &= 1 \end{aligned}$$

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$	$\|$	$+$	0	$+$	
$\ln(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On rappelle les limites et propriétés classiques :

Si $x > -1$: $\ln(1+x) \leq x$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

5.4 Fonction $\log_{10}$

Si x est réel, poser $10^x = \exp(x \ln(10))$ permet de donner un sens aux puissances non entières de 10 tout en respectant les relations classiques des puissances. Si x et y sont réels :

- $10^x.10^y = 10^{x+y}$,
- $(10^x)^y = 10^{x \cdot y}$

La fonction **logarithme décimal** :

$$\log_{10} : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R} \\ x \to \log_{10}(x) \end{cases}$$

est déterminée par le fait que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$10^{\log_{10}(x)} = x$$

ou de manière équivalente, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\log_{10}(10^x) = x$$

On a, pour tout $x > 0$:

$$\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \simeq \frac{\ln(x)}{2,30}.$$

La fonction $\log_{10}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad \log_{10}'(x) = \frac{1}{\ln(10)x}$$

ainsi que l'équation fonctionnelle fondamentale $\big(\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2\big)$:

$$\log_{10}(xy)=\log_{10}(x)+\log_{10}(y)$$

ainsi que les formules qui s'en suivent...

6 Fonctions polynômes et puissances

Pour n entier naturel non nul, la fonction **puissance** $n : x \to x^n$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, la fonction **puissance** $-n : x \to x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. On convient $x^0 = 1$ pour $x \neq 0$ et on évite 0^0.

Une fonction f est dite **polynôme de degré** n (n entier) quand il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_n, a_{n-1}, ..., a_0)$ des réels qu'on appelle **les coefficients** (a_n non nul), tel que pour tout x réel :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

On dit que f est **unitaire** quand $a_n = 1$.

Propriété 2 *Si 2 fonctions polynômes sont égales sur $\mathbb{R}$ alors leurs degrés et leurs coefficients sont les mêmes.*

Soit f une fonction polynôme unitaire de degré 3 et α une racine de f : $f(\alpha)=0$.

Propriété 3 *Dans les conditions précédentes, il existe b et c réels tels que pour tout x réel :*

$$f(x) = (x-\alpha)(x^2+bx+c)$$

Si x est **strictement positif** et α est un réel, on pose :

$$x^\alpha = \exp(\alpha\ln(x)) = e^{\alpha\ln(x)}$$

Cette définition prolonge les puissances classiques aux exposants α réels pour les arguments x **strictement positifs**. On obtient ainsi la fonction **puissance** α :

$$\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}_+^* \\ x \to x^\alpha \end{cases}$$

La fonction puissance α ($x \to x^\alpha$) est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et a pour dérivée $\alpha x^{\alpha-1}$. Elle est croissante si $\alpha > 0$ auquel cas on peut la prolonger par 0 en 0. On a les règles opératoires suivantes (α et β sont réels, x et y strictement positifs).

$$\begin{aligned} x^\alpha x^\beta &= x^{\alpha+\beta} \\ (xy)^\alpha &= x^\alpha y^\alpha \\ \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha &= \frac{x^\alpha}{y^\alpha} \\ \frac{1}{x^\alpha} &= x^{-\alpha} \\ (x^\alpha)^\beta &= x^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Si $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on retrouve ainsi les racines n-ièmes : $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ qui vérifient : $(\sqrt[n]{x})^n = x$ parmi lesquelles la racine carrée : $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$ qui vérifie $(\sqrt{x})^2 = x$.

Attention ces notations sont réservées aux arguments positifs : si x est réel :

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

On rappelle les limites classiques : (comparaison des croissances) si $\alpha > 0$:

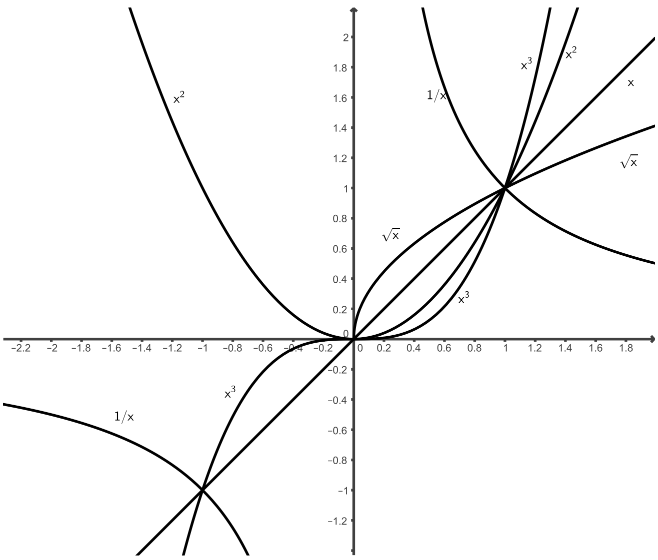
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$$

Limite classique ($\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Quelques exemples de graphiques à avoir en tête :



7 Fonctions hyperboliques

S'inspirant des formules d'Euler on pose : si $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

ch est la fonction **cosinus hyperbolique**, sh est la fonction **sinus hyperbolique**, th est la fonction **tangente hyperbolique**.

Les notations cosh, sinh, tanh sont aussi couramment utilisées.
On a la formule suivante dite **Pythagore hyperbolique**(à retenir), pour tout $x \in \mathbb{R}$:

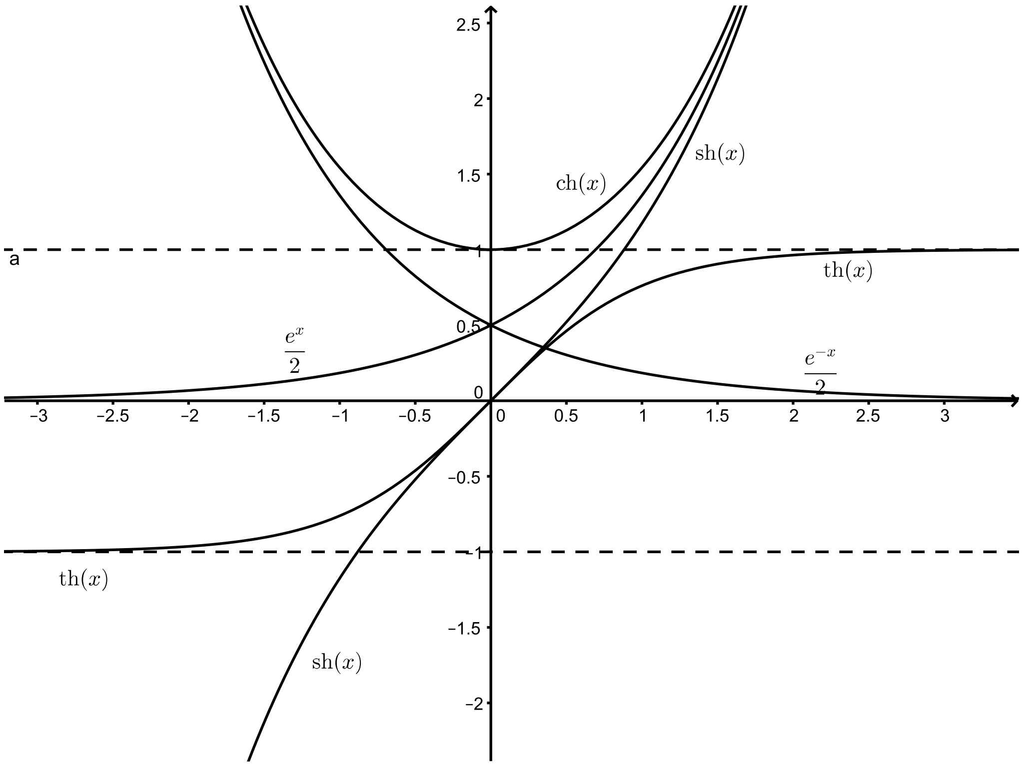
$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$$

La fonction ch est paire. Les fonctions sh et th sont impaires.

On a le tableau de dérivées suivant

u	u'
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{th}(x)$	$1 - \mathrm{th}^2(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\mathrm{ch}(x) = \mathrm{sh}'(x)$	$+\infty$ $\searrow$	1	$\nearrow$ $+\infty$
$\mathrm{sh}(x) = \mathrm{ch}'(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$
$\mathrm{th}(x)$	-1 $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+1$



8 Fonctions trigonométriques

8.1 Fonctions directes

La fonction cos est 2π périodique, paire. La fonction sin est 2π périodique, impaire.

La fonction tan (**tangente**) est définie par :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

pour x tel que $\cos(x) \neq 0$ autrement dit pour $x \equiv \pm\frac{\pi}{2} \quad [\pi]$.

La fonction est tan est π périodique, impaire et on a le tableau de dérivées suivant

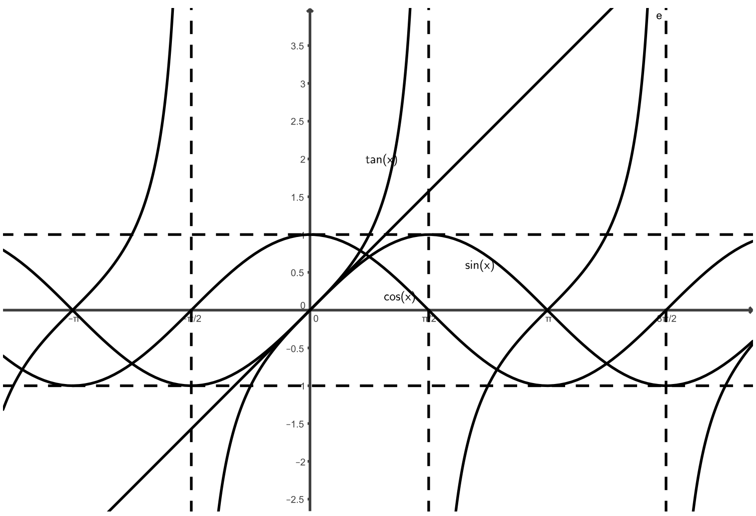
u	u'
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

x		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π	
$\sin(x)$	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘
$\cos(x)$	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗
$\tan(x)$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗

On a : si x est réel : $|\sin(x)| \leq |x|$.
Limites classiques :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$



8.2 Application à l'équation différentielle : $y'' = -\omega^2 y$.

On fixe ici $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$.

Théorème 3 (Équation différentielle $y'' = -\omega^2 y$) *La fonction f définie et 2 fois dérivable* *sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ satisfait l'équation différentielle :*

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R} : f''(t) = -\omega^2 f(t) \\ f(0) = x_0 \\ f'(0) = y_0 \end{cases}$$

si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad : \quad f(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

avec A et B réels donnés par conditions initiales :

$$\begin{cases} f(0) = A = x_0 \\ f'(0) = \omega B = y_0 \end{cases}$$

En particulier le problème posé a une et une seule solution.

Elle peut être aussi recherché sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R} : f(t) = A\cos(\omega(t - \phi))$$

les constantes A et ϕ étant à déterminer en fonction des conditions initiales.

8.3 Fonctions trigonométriques inverses

8.3.1 La fonction arcsin

Le tableau de variation de sin montre que si $x \in [-1, +1]$, il existe un unique $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(y) = x$. On obtient ainsi une fonction (**arcsinus**) :

$$\arcsin \begin{cases} [-1, +1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x \mapsto y = \arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ tel que } \sin(y) = x \end{cases} .$$

On a ainsi :

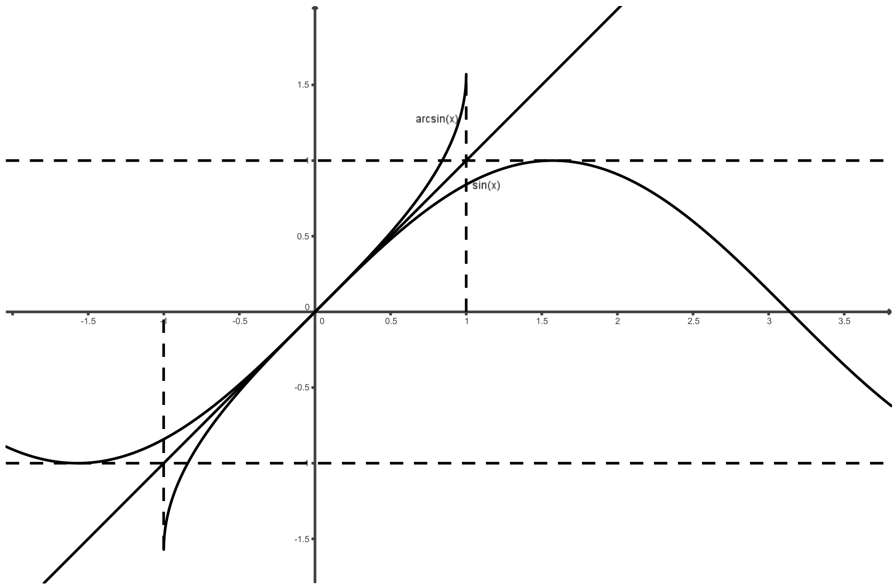
- Si $x \in [-1, +1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$;
- Si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$;
- Si $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in [-1, +1]$,

$$\sin(x) = \alpha \text{ si et seulement si } \begin{cases} x \equiv \arcsin(\alpha)\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pi - \arcsin(\alpha)\ [2\pi] \end{cases}$$

Par application des résultats sur la dérivée d'une réciproque, on obtient, en utilisant le fait que $\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et donc $\cos(\arcsin(x)) \geq 0$, si $x \in]-1, 1[$:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

x	-1		0		1
$\arcsin'(x)$	$\Vert$	$+$	1	$+$	$\Vert$
$\arcsin(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\frac{\pi}{2}$



8.3.2 La fonction arccos

Le tableau de variation de cos montre que si $x \in [-1, +1]$, il existe un unique $y \in [0, \pi]$ tel que $\cos(y) = x$. On obtient ainsi une fonction (**arccosinus**) :

$$\arccos \begin{cases} [-1, +1] \to [0, \pi] \\ x \mapsto y = \arccos(x) \in [0, \pi] \text{ tel que } \cos(y) = x \end{cases}.$$

On a ainsi :

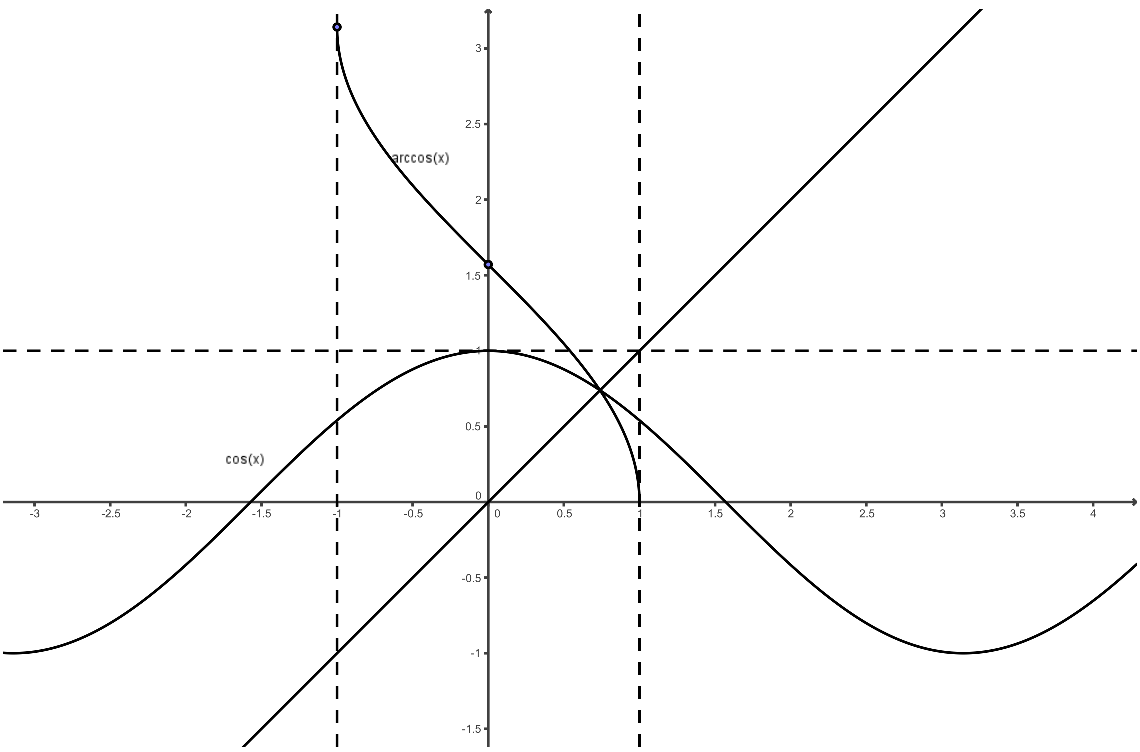
- Si $x \in [-1, +1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$;
- Si $x \in [0, \pi]$, $\arccos(\cos(x)) = x$;
- Si $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in [-1, +1]$,

$$\cos(x) = \alpha \quad \text{si et seulement si} \quad x \equiv \pm \arccos(\alpha) \quad [2\pi]$$

Par application des résultats sur la dérivée d'une réciproque, en utilisant le fait que $\arccos(x) \in [0, \pi]$ et donc $\sin(\arccos(x)) \geq 0$, on obtient, si $x \in]-1, 1[$:

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

x	-1		0		1
$\arccos'(x)$	$\Vert$	$-$	-1	$-$	$\Vert$
$\arccos(x)$	π	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0



On montre que, si $x \in [-1, 1]$:

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

8.3.3 La fonction arctan

Le tableau de variation de tan montre que si $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(y) = x$. On obtient ainsi une fonction (**arctan**) :

$$\arctan \begin{cases} \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x \mapsto y = \arctan(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ tel que } \tan(y) = x \end{cases}.$$

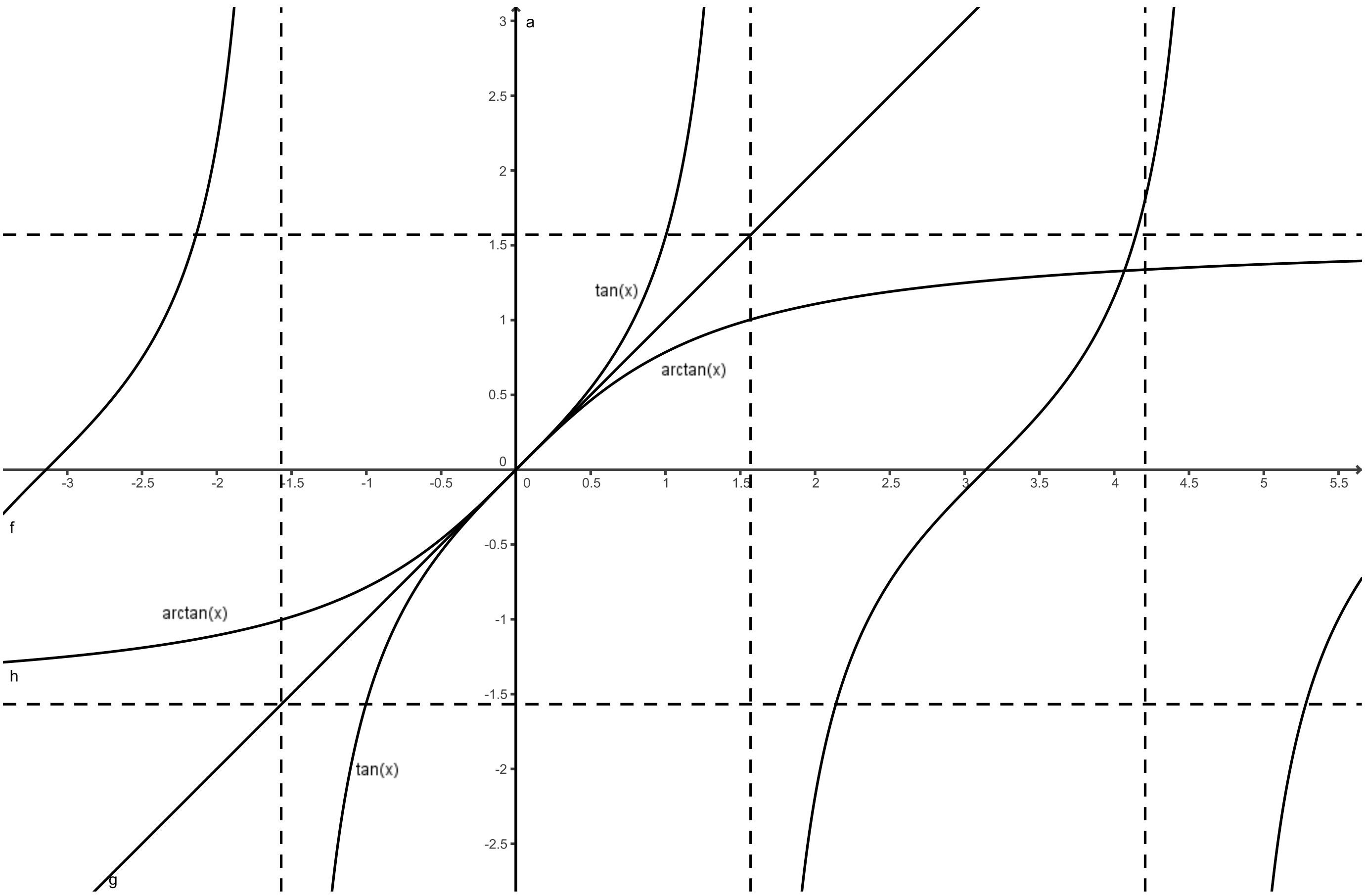
On a ainsi :

- Si $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$;
- Si $x \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$, $\arctan(\tan(x)) = x$;
- Si $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\tan(x) = \alpha \;\text{ si et seulement si }\; x \equiv \arctan(\alpha)\ [\pi]$$

Par application des résultats sur la dérivée d'une réciproque, on obtient, si $x \in \mathbb{R}$:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$



On montre : si $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

9 Tableau des dérivées

On rappelle le tableau de dérivées suivant (u est une fonction dérivable).

Expression $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Domaine de validité
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}$
u^n	$nu'u^{n-1}$	
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$
u^α	$u'\alpha u^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, u > 0$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$	$u \neq 0$
e^x	e^x	
e^u	$u'e^u$	
$\ln(\|x\|)$	$\frac{1}{x}$	$x \neq 0$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$	$u > 0$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k.\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	

Savoirs et savoirs faire indispensables

Savoirs

Connaissance des fonctions élémentaires et leurs propriétés principales (tableau de variations, dérivée ...).

Savoir-faire

Étude de fonctions simples. Calcul d'une dérivée composée. Identification d'une bijection.