

## Fiche 9 : Fonctions élémentaires.

On rappelle que pour  $a > 0$  et  $b$  réel :

$$a^b = \exp(b \ln(a))$$

### Exercice 1

Résoudre dans les équations d'inconnue  $x$  réel :

1.  $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$  ( $x > 0$ ),
2.  $(2^x)^2 = (2^{x^2})$ ,
3.  $2^{(x^2)} = 3^{(x^3)}$ ,
4.  $e^x - e^{-x} = 2\sqrt{2}$ ,
5.  $e^x + e^{-x} = 4$ ,
6.  $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2}$ .

### Exercice 2

1. Étudier la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ ,
2. Trouver la plus grande valeur de  $\sqrt[n]{n}$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .
3. En déduire que quels soient  $m$  et  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}^*$ , l'un des nombres  $\sqrt[n]{m}$ ,  $\sqrt[m]{n}$  est inférieur ou égal à  $\sqrt[3]{3}$ .
4. Trouver tous les couples d'entiers naturels distincts non nuls tels que  $n^m = m^n$ .

### Exercice 3

On considère dans le plan  $\mathbb{R}^2$  la parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y = x^2$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

1. Montrer qu'une droite  $D$  non verticale intersecte  $\mathcal{P}$  en un et un seul point si et seulement si il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $D$  soit la tangente à  $\mathcal{P}$  en  $(a, a^2)$ .
2. Déterminer les points du plan par lesquels passent respectivement 0, 1 et 2 tangentes à  $\mathcal{P}$ .