

Fiche 10 : TD du 26-09.

Exercice 1

On cherche à résoudre l'équation

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = 0.$$

1. Rechercher une solution imaginaire pure ai à l'équation avec $a \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer $b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = (z-ai)(z^2 + bz + c).$$

3. En déduire toutes les solutions de l'équation.
4. Sur le même modèle, résoudre l'équation $z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0$.

Exercice 2

1. Établir la formule de trigonométrie $\cos^4(\theta) = \cos(4\theta)/8 + \cos(2\theta)/2 + 3/8$.
2. Fournir une relation analogue pour $\sin^4(\theta)$, $\cos^5(\theta)$, $\sin^5(\theta)$ et $\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)$.

Exercice 3

On cherche à déterminer tous les réels t tels que

$$\cos(t) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

1. Démontrer qu'il existe une unique solution dans l'intervalle $]0, \pi/4[$. Dans la suite, on notera cette solution t_0 .
2. Calculer $\cos(2t_0)$, puis démontrer que $\cos(4t_0) = -\cos(t_0)$.
3. En déduire t_0 .
4. Résoudre l'équation.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(x + ky)$;
2. $S = \sum_{k=0}^n \frac{\cos(kx)}{(\cos x)^k}$ et $T = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(kx)}{(\cos x)^k}$, avec $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
3. $D_n = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$, avec $x \neq 0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5

Dans le plan complexe orienté on considère A, B, C, D 4 points situés dans cet ordre sur le cercle trigonométrique. On note P, Q, R, S les milieux respectifs des arcs (orientés) AB, BC, CD, DA de Γ .

Montrer que les segments $[PR]$ et $[QS]$ sont orthogonaux.