Fiche 11 : Fonctions élémentaires.

On rappelle que pour $a > 0$ et b réel :
$$a^b = \exp(b \ln(a))$$

Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants d'inconnue x et y réels :
$$\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x + y = 7 \\ \ln(x) + \ln(y) = \ln(10) \end{cases}$$

Exercice 2

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$

1. Étudier la fonction f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle qu'on précisera.
3. Expliciter la réciproque g de f.

Exercice 3

Déterminer la dérivée et faire une étude de la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$.

Exercice 4

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:
$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$$

Exercice 5

Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

1. Déterminer son domaine de définition D_f.
2. Étudier sa parité.
3. Déterminer f' et étudier la fonction f.
4. Montrer que pour tout x réel : $\sinh(f(x)) = x$ et $f(\sinh(x)) = x$.

Exercice 6

Soit g la fonction définie pour $x \geq 1$ par :
$$g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

1. Déterminer g' (là ou f est dérivable !) et étudier la fonction g.
2. Montrer que pour tout $x > 1$: $\cosh(g(x)) = x$ et .
3. Que pensez de la formule : pour tout x réel : $g(\cosh(x)) = x$?