

DS 1, correction rapide.

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4, \\ u_1 = 11, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n. \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (-1)^n + 3 \times 4^n.$$

Récurrence avec prédécesseur sans difficulté sachant $(1)^2 = 3(-1) + 4$ et $4^2 = 2 * 4 + 4$.

Exercice 2

On pose $z = e^{2i\pi/5}$ puis $a = z + z^4$ et $b = z^2 + z^3$.

1. En utilisant le fait que la somme des racines 5 ièmes de 1 est nulle, on a $a + b = -1$ et $ab = -1$.
2. On a ainsi a et b racines de $X^2 + X - 1 = 0$ et donc $\{a, b\} = \{\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\}$.

Une étude sur le cercle montre que a est positif donc $a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

$$a = 2 \cos(2\pi/5) \quad b = 2 \cos(4\pi/5) \quad \text{et donc} \quad \cos(2\pi/5) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \quad \cos(4\pi/5) = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.$$

3. Avec les formules de symétries et de Pythagore :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}},$$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1 + \sqrt{5}}{4},$$

$$\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

Exercice 3

On pose si x est réel : $P(x) = x^3 - 3x + 1$ et on considère l'équation d'inconnue x réel :

$$(E) : P(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$$

1. Montrer par une étude de fonction que (E) admet 3 solutions et 3 seulement qui seront notées $x_1 < x_2 < x_3$.
2. Montrer la relation : si $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\sin(3\theta) = 3 \sin(\theta) - 4 \sin^3(\theta)$$

On utilise la formule $e^{i3\theta} = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^3$.

3. $\theta \in \mathbb{R} : P(2 \sin(\theta)) = -2 \sin(3\theta) + 1$.

4. $\theta \in \mathbb{R} : P(2 \sin(\theta)) = 0$ si et seulement si $-2 \sin(3\theta) + 1 = 0$, $\sin(3\theta) = \sin(\pi/6)$.
Ce qui donne $3\theta \equiv \pi/6[2\pi]$, $3\theta \equiv 5\pi/6[2\pi]$, $\theta \equiv \pi/18[2\pi/3]$, $\theta \equiv 5\pi/18[2\pi/3]$.

Ainsi on a $P(2 \sin(-7\pi/18)) = P(2 \sin(\pi/18)) = P(2 \sin(5\pi/18))$. Ce qui en utilisant : $x_1 < x_2 < x_3$ donne :

$$x_1 = 2 \sin(-7\pi/18)$$

$$x_2 = 2 \sin(\pi/18)$$

$$x_3 = 2 \sin(5\pi/18)$$

Exercice 4

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On définit deux suites $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant :

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad b_n = B_{n+1} - B_n.$$

1. Si n est entier alors :

$$\sum_{k=0}^n a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k.$$

On peut faire un récurrence (ou une simplification télescopique). En effet : si :

$$\sum_{k=0}^n a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} a_k B_k &= A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k + a_{n+1} B_{n+1} = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k + (A_{n+1} - A_n) B_{n+1} \\ &= A_{n+1} B_{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k + A_n (B_{n+1} - B_n) = A_{n+1} B_{n+1} - \sum_{k=0}^n A_k b_k \end{aligned}$$

Ce qui fait "tourner" la récurrence.

2. On considère les suites $a_k = 2^k$ et $B_k = k$ pour $k \in \mathbb{N}$ et on obtient pour $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = 2^{n+1} - 1$$

$$\sum_{k=0}^n 2^k k = (2^{n+1} - 1)n - \sum_{k=0}^{n-1} (2^{k+1} - 1) = (2^{n+1} - 1)n - 2(2^n - 1) + n$$

$$\sum_{k=0}^n 2^k k = 2^{n+1}(n-1) + 2$$

Exercice 5

Soit n un entier ≥ 2 et $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ les n racines n -ièmes de 1 :

1. D'après le cours :

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$$

2. En prenant la partie réelle de la relation précédente :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$$

3.

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$e^{\pi/n} \neq 1$ donc :

$$S = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (e^{i\pi/n})^k \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{(e^{i\pi/n})^n - 1}{(e^{i\pi/n}) - 1} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{-2}{e^{i\pi/2n}(2i \sin(\pi/2n))} \right)$$

$$S = \operatorname{Im} \left(\frac{ie^{-i\pi/2n}}{\sin(\pi/2n)} \right) = \frac{\cos(\pi/2n)}{\sin(\pi/2n)}$$

$$S = \frac{1}{\tan(\pi/2n)}$$

4.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} |z_k - 1|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} |e^{2ik\pi/n} - 1|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |e^{ik\pi/n} 2i \sin(k\pi/n)|^2 \\ \sum_{k=0}^{n-1} |z_k - 1|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} 4 \sin^2(k\pi/n) = \sum_{k=0}^{n-1} 4 \frac{1 - \cos(2k\pi/n)}{2} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \cos(2k\pi/n)) = 2n \end{aligned}$$

5. De même :

$$\sum_{k=0}^{n-1} |z_k - 1| = \sum_{k=0}^{n-1} 2 \sin(k\pi/n) = \frac{2}{\tan(\pi/2n)}$$