Fiche 12 : TD du 3-10.

Exercice 1

Calculer pour $(n, a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^2$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cosh(a+bk), \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sinh(a+bk).$$

Exercice 2

1. Montrer que pour tout réel x non nul, on a :
$$\tanh(x) = \frac{2}{\tanh(2x)} - \frac{1}{\tanh x}$$
2. En déduire la valeur de
$$u_n = 2^0 \tanh(2^0 x) + 2^1 \tanh(2^1 x) + \cdots + 2^n \tanh(2^n x)$$
pour n entier naturel non nul et x réel non nul donnés puis calculer la limite de (u_n).

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ par :

$$f(x) = 2\sin(x) + \tan(x) - 3x$$

Étudier la fonction f et montrer que, pour tout $x \in [0; \dfrac{\pi}{2}[$:

$$2\sin(x) + \tan(x) \geq 3x$$

Exercice 4

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

1. Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de l'expression $\frac{1+x}{1-x}$
2. En déduire le domaine de définition D_f de f.
3. Étudier la parité de f sur D_f.
4. Déterminer $f'(x)$ pour $x \in D_f$.
5. Justifier que f est une bijection entre des ensembles à préciser (*On formulera la réponse à cette question sous la forme : la fonction f est une bijection de l'ensemble ... sur l'ensemble ...*)
6. Montrer que pour tout x de D_f : $\tanh(f(x)) = x$
7. Montrer que pour x dans un ensemble qu'on déterminera : $f(\tanh(x)) = x$.

Exercice 5

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \exp(x/e)$ et on considère par ailleurs l'équation d'inconnue x réelle :

$$(E) \quad \exp(\exp(x/e)/e) = x$$

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que si $f(x) = x$ alors x est solution de (E).
3. Montrer réciproquement que si x est solution de (E) alors $f(x) = x$ (*on pourra procéder par l'absurde ou par contraposée*).
4. Étudier sur $\mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = f(x) - x$.
5. Résoudre l'équation (E).