Fiche 15 : TD du 10-10.

Exercice 1

Résoudre le système :

$$\begin{cases} \cos x &= -\frac{3}{5} \\ \sin x &= -\frac{4}{5} \end{cases},$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

Calculer sous forme algébrique :

1. $\sin(\arcsin(1/3) - \arcsin(1/4))$;
2. $\cos(\arccos(1/3) + \arccos(1/4))$;
3. $\tan(\arctan(1/3) + \arccos(1/4))$;

Exercice 3

Vérifier les égalités :

$$2\arccos\left(\frac{3}{4}\right) = \arccos\left(\frac{1}{8}\right) \quad ; \quad \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = \arcsin\left(\frac{56}{65}\right)$$

Exercice 4

Établir l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$$

Exercice 5

On considère la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left[\sin\left(\arccos(\cos(x))\right)\right]$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est paire.
3. Montrer que :
$$\forall u \in [-1, 1],\ \arccos(-u) + \arccos(u) = \pi.$$
4. En déduire que f est π-périodique.
5. Tracer le graphe de f. Justifier.

Exercice 6

On pose $\theta_0 = \arccos\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$.

1. Montrer que $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{3}[$.
2. Calculer $\cos(2\theta_0)$ puis démontrer que $\cos(4\theta_0) = -\cos(\theta_0)$.
3. En déduire une expression algébrique de θ_0

Exercice 7

On souhaite étudier la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

1. Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, et est une fonction paire.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$.
3. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.
4. Montrer que si $x \geq 0$ alors $f(x) = 2\arctan(x)$ (*on pourra calculer* $f(1)$).
5. Donner une formule analogue pour $x < 0$.