Fiche 16 : Equations différentielles.

Exercice 1

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants (inconnue y, variable $t \in \mathbb{R}$) et donner l'allure des solutions :

1. $\begin{cases} y' = -2y \\ y(1) = -1 \end{cases}$;
2. $\begin{cases} 2y' + y = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.
3. $\begin{cases} y' + 2y = t \\ y(0) = 0 \end{cases}$.
4. $\begin{cases} y' + y = e^t \\ y(0) = -1 \end{cases}$.
5. $\begin{cases} y' + 2y = \cos(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$.
6. $\begin{cases} y' + 2y = e^{-2t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Exercice 2

Résoudre le problème de Cauchy (inconnue y, variable $t \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{cases} y' + y = 2e^t + 8\sin(t) + 6\cos(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 3

On lâche (vitesse initiale nulle) un corps de masse m en chute libre dans un fluide. En première approximation et pour les petites vitesses, la vitesse v du corps est soumise à la loi :

$$mv' = mg - kv$$

où g est l'accélération de la pesanteur et k est un coefficient dit de *frottements*.

Déterminer l'expression de $v(t)$ et donner son allure.

Exercice 4

La tension aux bornes d'un condensateur de capacité C qu'on charge à la tension U à travers la résistance R suit la loi :

$$U_c(t) + \tau\, \dot{U}_c(t) = U$$

où $\tau = R\, C$.
On suppose qu'à $t = 0$, $U_c = 0$.

1. On suppose que $U > 0$ est une constante. Résoudre l'équation et donner l'allure de U_c. On fera apparaitre géométriquement le temps τ.
2. On suppose $U = U_0 \cos(\omega t)$ ($U_0 > 0$, $\omega > 0$). Résoudre l'équation et justifier l'apparition d'un régime permanent. Donner graphiquement l'allure de U_c.

Exercice 5

On fixe $x_0 \in]0, 1[$ et on s'intéresse au problème (L) suivant :
Déterminer les (la ?) fonction f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0, 1[$ et telle que

$$(L) \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R} \ : \ f'(t) = f(t)(1 - f(t)) \\ f(0) = x_0 \end{cases}$$

En étudiant la fonction $t \to 1/f(t)$, résoudre le problème (L) et donner l'allure de ses solutions.