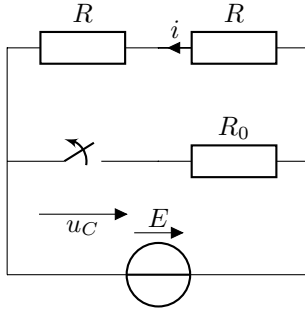


PROBLÈME I.

Éclairage d'un train miniature

I.1) Le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

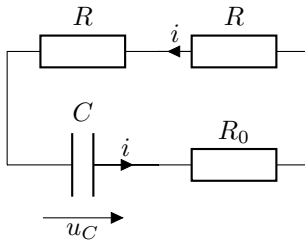


I.2) Le courant passant dans la branche contenant R_0 est nul donc la tension aux bornes de R_0 est nulle également d'après la loi d'Ohm. La loi des mailles appliquée à la maille du bas donne donc $u_C = E = 12 \text{ V}$.

La résistance équivalente aux deux lampes sur la branche du haut vaut $2R$. La tension appliquée sur cette branche vaut E donc d'après la loi d'Ohm, $i = \frac{E}{2R} = 60 \text{ mA}$.

I.3) Chaque lampe reçoit une puissance $\mathcal{P} = Ri^2 = \frac{E^2}{4R} = 36 \text{ mW}$. $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$ donc l'éclairage est optimal.

I.4) Le contact avec la source de tension cesse.



D'après la loi des mailles, $u_C = Ri + Ri + R_0i = (2R + R_0)i$ et $i = -C \frac{du_C}{dt}$ car

le condensateur est en convention générateur. On en déduit l'équation différentielle :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{(2R + R_0)C} = 0.$$

I.5) C'est l'équation d'un système linéaire du premier ordre de constante de temps $\tau = (2R + R_0)C = 0,21 \text{ s}$.

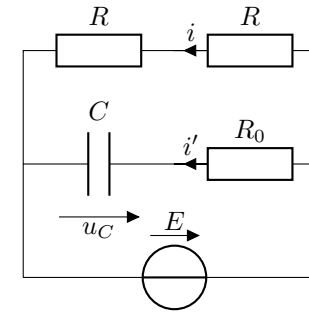
L'équation est homogène, de solution générale : $u_C(t) = A \exp(-t/\tau)$. La condition initiale implique $A = E$ donc la solution est $u_C(t) = E \exp(-t/\tau)$ et

$$i = -C \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{2R + R_0} \exp(-t/\tau).$$

I.6) La puissance reçue par chaque lampe diminue selon l'équation $\mathcal{P}(t) = Ri^2(t) = \frac{RE^2}{(2R + R_0)^2} e^{-2t/\tau} = \mathcal{P}_0 \left(\frac{2Re^{-t/\tau}}{2R + R_0} \right)^2$.

Au bout d'un temps Δt , elle vaut $\mathcal{P}(\Delta t) = 0,35 \mathcal{P}_0 < 0,75 \mathcal{P}_0$ et est donc insuffisante pour éclairer correctement pendant toute la durée du soubresaut.

I.7) Le circuit est complet.



D'après la loi des mailles dans la maille du bas, $u_C + R_0i' = E$. De plus $i' = C \frac{du_C}{dt}$ (convention récepteur pour le condensateur) donc $u_C(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$R_0C \frac{du_C}{dt} + u_C = E \text{ soit sous forme canonique : } \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{R_0C} u_C = \frac{E}{R_0C}.$$

I.8) La constante de temps est ici $\tau_0 = R_0C = 10 \text{ ms}$.

La solution générale de l'équation différentielle est $u_C(t) = E + Ae^{-t/\tau_0}$.

On prend l'instant initial au moment où le contact se fait. À ce moment la tension aux bornes du condensateur, par continuité, est égale à la charge qu'il avait à la fin du soubresaut : $u_C(0) = E \exp(-\Delta t/\tau)$.

On en déduit $A = E(\exp(-\Delta t/\tau) - 1) = -0,38 E$.

Pour conclure, la solution de l'équation différentielle est

$$u_C(t) = E \left(1 - (1 - e^{-\Delta t/\tau}) \exp(-t/\tau_0) \right).$$

I.9) Le courant i circulant dans les lampes est en fait indépendant de la charge du condensateur, puisque la tension E est aussi appliquée à leurs bornes. On est donc dans la même situation que dans la première partie : les lampes éclairent de façon optimale.

PROBLÈME II.

Capteur de température et pont de Wheatstone

II.1) $\frac{dR}{dT} = -\frac{B}{T^2} R_0 \exp\left(B\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right)$ donc $\alpha(T) = -\frac{B}{T^2}$.

$$B = -\alpha(T_0)T_0^2 = 4,1 \times 10^3 \text{ K}.$$

II.2) On a $E = U_{CD}$.

Les résistances $R(T)$ et R_1 sont en série donc d'après le diviseur de tension sur la branche

$$CAD, U_{AC} = \frac{R(T)}{R_1 + R(T)} E.$$

De même sur la branche CBD , $U_{BC} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} E$.

De plus par additivité des tensions dans l'ARQS, $U_{AB} = U_{AC} - U_{BC}$ donc

$$U_{AB} = \left(\frac{R(T)}{R_1 + R(T)} - \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right) E.$$

II.3) À $T = T_0$, $R(T_0) = R_0$. $U_{AB} = 0$ implique alors $\frac{R_0}{R_1 + R_0} = \frac{R_3}{R_2 + R_3}$ soit $R_0(R_2 + R_3) = (R_0 + R_1)R_3$ puis $R_0R_2 = R_1R_3$.

II.4) On a donc $U_{AB} = \left(\frac{R(T)}{R_1 + R(T)} - \frac{R_0}{R_1 + R_0} \right) E$.

Avec $R(T) = R_0 + \Delta R$, il vient $U_{AB} = \frac{(R_0 + \Delta R)(R_1 + R_0) - R_0(R_1 + R_0 + \Delta R)}{(R_1 + R_0 + \Delta R)(R_1 + R_0)} E$

donc $U_{AB} = \frac{R_1 \Delta R}{(R_1 + R_0 + \Delta R)(R_1 + R_0)} E$.

II.5) Si $\Delta R \ll R_0$ on peut le négliger au numérateur soit $U_{AB} \approx \frac{R_1 \Delta R}{(R_1 + R_0)^2} E$ donc

$$s = \frac{U_{AB}}{\Delta R} = \frac{R_1}{(R_1 + R_0)^2} E.$$

s est maximal quand sa dérivée s'annule. Or $s'(R_1) = \frac{(R_1 + R_0)^2 - R_1 \times 2(R_1 + R_0)}{(R_1 + R_0)^4} E = \frac{R_0 - R_1}{(R_1 + R_0)^3} E$ donc $s'(R_1) = 0$ implique $R_1 = R_0$.

La valeur maximale de s est alors $s_{\max} = \frac{E}{4R_0}$.

II.6) $R_3 = R_0R_2/R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$.

II.7) $|\Delta R| = \frac{|\Delta U_{AB}|}{s}$ donc $|\Delta R|_{\min} = \frac{|\Delta U_{AB}|_{\min}}{s_{\max}} = 4R_0 \frac{|\Delta U_{AB}|_{\min}}{E} = 40 \Omega$.

En approximant la dérivée au taux de variation $\frac{dR}{dT} \approx \frac{\Delta R}{\Delta T}$ on a $\alpha(T_0) \approx \frac{1}{R_0} \frac{\Delta R}{\Delta T}$.

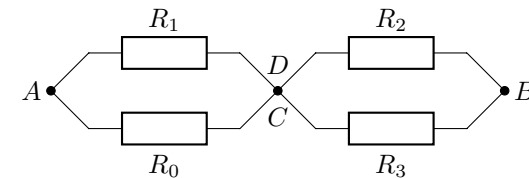
Inversement $\Delta T \approx \frac{1}{\alpha(T_0)} \frac{\Delta R}{R_0}$.

La variation minimale de température détectable avec ce dispositif est donc

$$|\Delta T|_{\min} \approx \frac{1}{\alpha(T_0)} \frac{|\Delta R|_{\min}}{R_0} = 8,7 \times 10^{-2} \text{ K}.$$

Cette précision de l'ordre du dixième de degré Celsius est suffisante pour la plupart des applications courantes.

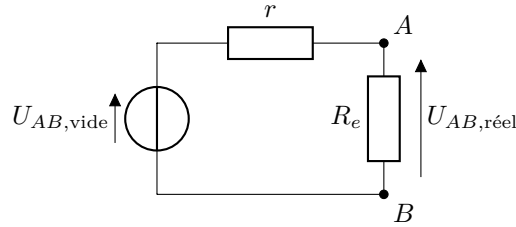
II.8) Si la source est remplacée par un fil, les points C et D sont au même potentiel et peuvent être donc considérées comme un point unique. Le circuit devient alors :



Avec les réglages précédents, toutes les résistances sont égales à R_0 . L'association parallèle (R_0, R_1) est équivalente à une résistance $R_{eq} = \frac{R_0 \times R_1}{R_0 + R_1} = \frac{R_0}{2}$ et de même pour l'association (R_2, R_3) .

Les deux résistances équivalentes se retrouvent en série entre A et B , se comportant comme une résistance unique $R'_{eq} = 2R_{eq} = R_0$. Pour conclure, la résistance interne du modèle de Thévenin du pont de Wheatstone est $r = R_0$.

II.9) Le circuit équivalent au pont de Wheatstone avec le voltmètre est alors le suivant :



D'après le diviseur de tension on a $U_{AB, réel} = U_{AB, vide} \frac{R_e}{R_e + r} \approx U_{AB, vide}$ si $R_e \gg r$.

PROBLÈME III.

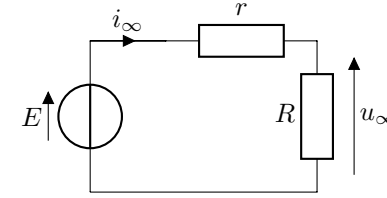
Caractéristique d'une bobine réelle

III.1) Avant la fermeture de l'interrupteur, le courant $i(0^-) = 0$. De plus le condensateur se comporte en régime stationnaire comme un interrupteur ouvert, si bien qu'aucun courant ne le parcourt. Il n'existe donc aucun courant dans le circuit, donc la tension $u(0^-) = 0$ en vertu de la loi d'Ohm.

Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, $u(0^+) = 0$; par continuité du courant traversant une bobine, $i(0^+) = 0$.

III.2) Le régime permanent atteint est stationnaire, où la bobine idéale se comporte comme un fil et le condensateur comme un interrupteur ouvert. Le circuit est alors équivalent au circuit ci-dessous.

On a alors $i_\infty = \frac{E}{R+r}$ et $u_\infty = \frac{RE}{R+r}$.



III.3) Cette équation se met sous forme canonique :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \underbrace{\frac{L+rRC}{RLC}}_{\omega_0/Q} \frac{du}{dt} + \underbrace{\frac{R+r}{RLC}}_{\omega_0^2} u = \frac{E}{LC}$$

On identifie la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{R+r}{RLC}}$ et le facteur de qualité

$$Q = \frac{\omega_0 RLC}{L+RrC} = \frac{\sqrt{(R+r)RLC}}{L+rRC}.$$

III.4) On observe des oscillations amorties donc le régime est pseudo-périodique. On en déduit que $Q > 1/2$.

III.5) On reconnaît tout d'abord la solution particulière de l'équation différentielle : $u_P(t) = \frac{RE}{R+r} = u_\infty$.

Le polynôme caractéristique de l'équation homogène est $x^2 + \frac{\omega_0}{Q}x + \omega_0^2$, dont le discriminant $\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right) = -4\omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{(2Q)^2} \right)$ est négatif.

Les racines sont : $r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{(2Q)^2}}$ donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

$$u_H(t) = e^{-\omega_0 t/(2Q)} \left(A \cos(\omega_0 \sqrt{1 - 1/(2Q)^2} t) + B \sin(\omega_0 \sqrt{1 - 1/(2Q)^2} t) \right)$$

La solution proposée s'écrit effectivement $u(t) = u_P(t) + u_H(t)$ avec $A = -u_\infty$ et $B = -\frac{u_\infty}{\sqrt{(2Q)^2 - 1}}$.

Vérifions les conditions initiales :

- $u(t = 0^+) = 0$ ce qui est le résultat attendu
- $\frac{du}{dt}(t = 0^+) = -u_\infty e^{-\omega_0 t/(2Q)} \left(\frac{\omega_0 \sqrt{1 - 1/(2Q)^2}}{\sqrt{(2Q)^2 - 1}} - \frac{\omega_0}{2Q} \right) = 0$. Il vient $i(t = 0^+) = \frac{1}{R}u(t = 0^+) + C \frac{du}{dt}(t = 0^+) = 0$ ce qui est le résultat attendu.

En conclusion, la solution proposée est correcte.

III.6) L'amplitude des oscillations autour de la valeur asymptotique u_∞ est $U_m(t) = u_\infty e^{-\omega_0 t/(2Q)}$.

Au bout de Q pseudo-périodes, c'est-à-dire à l'instant $t = QT = \frac{2\pi Q}{\omega_0 \sqrt{1 - 1/(2Q)^2}}$, on a $\omega_0 t/(2Q) = \frac{\pi}{\sqrt{1 - 1/(2Q)^2}} \approx \pi$ si $Q \gg 1$. L'amplitude est alors $U_m(QT) \approx u_\infty e^{-\pi}$, ce qui représente une proportion $e^{-\pi} \approx 0,04$ de sa valeur initiale $U_m(0) = u_\infty$.

On en conclut que Q est approximativement le nombre d'oscillations dont l'amplitude est supérieure à environ 4 % de l'amplitude initiale.

III.7) L'amplitude initiale est de 6 V. Il en reste 4 % soit 0,24 V au bout de 7 oscillations environ donc $Q \approx 7$.

Ce nombre est suffisamment grand pour pouvoir négliger 1 devant $(2Q)^2$.

On mesure la pseudo-période $T = 2,0$ ms donc $\omega_0 \approx 2\pi/T = 3,1 \times 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

III.8) On remarque $u_\infty \approx E$ donc on peut conclure que $r \ll R$. Alors $\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$

d'où $L \approx \frac{1}{C\omega_0^2} \approx 0,10 \text{ H}$.

De plus, si $r \ll R$, $Q \approx \frac{R\sqrt{LC}}{L + rRC}$ donc $r \approx \frac{\sqrt{L}}{Q\sqrt{C}} - \frac{L}{RC} \approx 35 \Omega$.

Les mesures s'accordent avec le jeu de valeurs (d).

PROBLÈME IV.

Flambage

IV.1) On peut mettre la relation sous la forme : $L_c = e \left(\frac{2Y}{\rho g e} \right)^{1/3}$. Effectuons l'analyse dimensionnelle de la relation.

Si cette relation est homogène alors $\left(\frac{2Y}{\rho g e} \right)^{1/3}$ est sans dimension donc $\frac{2Y}{\rho g e}$ est sans dimension. Vérifions le.

Le Pascal est l'unité de la pression, c'est-à-dire d'une force divisée par une superficie. Or une force est une masse que multiplie une accélération donc la dimension d'une pression est $\text{M.L.T}^{-2} \div \text{L}^2 = \text{M.L}^{-1}.\text{T}^{-2}$.

Les dimensions des différentes grandeurs sont alors :

$$\dim L_c = \dim e = \text{L} \quad \dim \rho = \text{M.L}^{-3} \quad \dim g = \text{L.T}^{-2} \quad \dim Y = \text{M.L}^{-1}.\text{T}^{-2}$$

Ainsi, le rapport $\frac{2Y}{\rho g e}$ a pour dimension $\frac{\text{M.L}^{-1}.\text{T}^{-2}}{\text{L.T}^{-2} \times \text{M.L}^{-3} \times \text{L}} = 1$: il est effectivement sans dimension.

Quel que soit son exposant, la relation est alors homogène. La seule chose que permet l'analyse dimensionnelle c'est ainsi de prédire que $L_c = e \times f \left(\frac{2Y}{\rho g e} \right)$ avec f une fonction quelconque.

IV.2) Le module de Young a l'expression suivante : $Y = \frac{1}{2} \rho g e \left(\frac{L_c}{e} \right)^3$.

L'épaisseur d'une feuille vaut $e = 5,3 \text{ cm} \div 500 = 1,1 \times 10^{-4} \text{ m}$.

Le volume de la ramette vaut $29,7 \text{ cm} \times 21,0 \text{ cm} \times 5,3 \text{ cm} = 3,3 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ donc la masse volumique du papier vaut $\rho 2,5 \text{ kg} \div 3,3 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 7,6 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

On estime sur la photographie de droite la longueur totale de la feuille : 18 cm représente 29,7 cm. Puis on estime la longueur de feuille libre, c'est-à-dire au-dessus du point de maintien : 12 cm ce qui représente $29,7 \text{ cm} \times 12 \div 18 = 20 \text{ cm}$. Le flambage venant de se produire, cette longueur est à peine supérieure à la longueur critique. On a donc $L_c = 0,20 \text{ m}$.

Avec $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, on obtient $Y = 3 \times 10^9 \text{ Pa}$.