PROBLÈME I

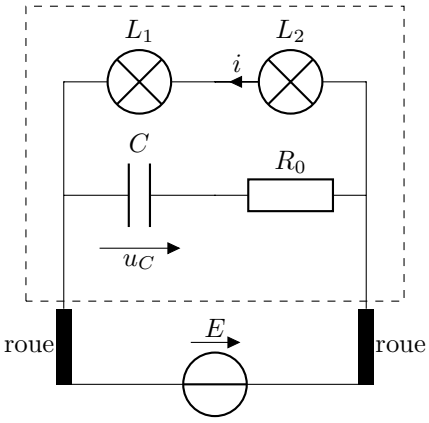
Éclairage d'un train miniature

Le modélisme ferroviaire repose sur la reproduction la plus fidèle possible de l'activité ferroviaire à échelle réduite, le plus couramment à l'échelle 1/87. L'alimentation des trains miniatures se fait traditionnellement par les rails en 12 V continu.

Dans ce problème on étudie un dispositif qui permet aux feux arrière de rester allumés lors des coupures d'alimentation au cours des soubresauts du train sur la voie.

Les feux sont deux lampes à incandescence L_1 et L_2 assimilables à deux conducteurs ohmiques de résistances $R_1 = R_2 = R = 100\,\Omega$. L'éclairement de chaque lampe est optimal pour une puissance consommée $\mathcal{P}_0 = 0{,}36\,\text{W}$. Toutefois, on considère que l'éclairement est satisfaisant si la puissance consommée est supérieure ou égale à 75% de la valeur de $\mathcal{P}_0$.

Ces lampes sont placées dans un circuit électrique relié aux deux roues arrière (voir ci-dessous). Ce circuit est composé d'un condensateur de capacité $C = 1{,}0\,\text{mF}$ et d'un conducteur ohmique de résistance $R_0 = 10\,\Omega$.



Les deux rails sont alimentés par une source idéale de force électromotrice : $E = 12\,\text{V}$.

Partie A. Situation normale

On se place tout d'abord en régime stationnaire dans des conditions où le contact roues/rails est assuré.

I.1) Représenter le circuit équivalent dans cette situation.

I.2) Déterminer la tension u_C aux bornes du condensateur ainsi que l'intensité i traversant les lampes.

I.3) En déduire la puissance fournie aux lampes. Que peut-on dire de l'éclairement ?

Partie B. Perte de contact

En prenant de la vitesse, le train peut avoir des soubresauts et le contact roue/rails est alors rompu pendant une durée Δt de l'ordre du dixième de seconde ; pour les applications numériques on prendra $\Delta t = 0{,}10\,\text{s}$.

I.4) Reproduire le circuit équivalent pendant le soubresaut. Obtenir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$.

I.5) Résoudre l'équation et en déduire le courant $i(t)$ circulant dans les lampes.

I.6) Les lampes vont-elles éclairer de façon satisfaisante pendant toute la durée du soubresaut ?

Partie A. Retour à la normale

Au bout de la durée Δt, le contact entre les roues et les rails est retrouvé. Le condensateur se recharge.

I.7) Reproduire le circuit équivalent pendant la charge du condensateur. Obtenir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$.

I.8) Résoudre l'équation en prenant comme origine des dates le moment où le contact est retrouvé.

I.9) Les lampes éclairent-elles de façon satisfaisante pendant la charge complète du condensateur ?

PROBLÈME II

Capteur de température et pont de Wheatstone

D'une façon générale, la valeur d'une résistance dépend de sa température T. On caractérise cette dépendance par le coefficient de température, noté $\alpha(T) = \dfrac{1}{R(T)}\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T}$. Les résistances utilisées comme capteur de température sont nommées thermistances.

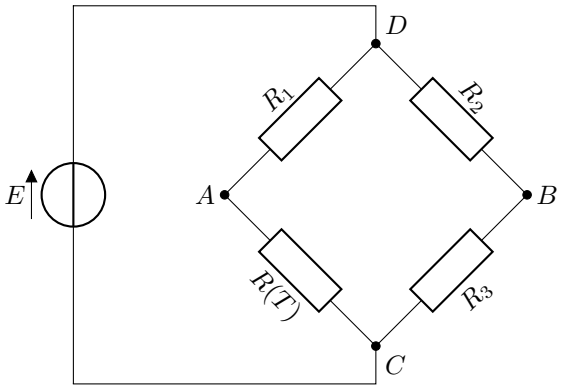
On considère dans ce problème une thermistance à coefficient de température négatif (CTN). La valeur de la résistance R de cette thermistance varie en fonction de la température suivant la relation :

$$R(T) = R_0 \exp\left(B\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right)$$

On utilise une thermistance CTN dont la fiche technique indique que pour $T_0 = 298\,\mathrm{K}$, $R(T_0) = 10\,\mathrm{k\Omega}$ et $\alpha(T_0) = -4{,}6 \times 10^{-2}\,\mathrm{K}^{-1}$.

II.1) Exprimer le coefficient de température $\alpha(T)$ pour une thermistance CTN et en déduire la valeur de B pour la thermistance utilisée.

Pour mesurer les variations de température, on insère la thermistance dans le « pont de Wheatstone » ci-dessous. On mesure la tension U_{AB} à vide.



II.2) Exprimer U_{AC} et U_{BC} puis en déduire que :

$$U_{AB} = \left(\frac{R(T)}{R_1 + R(T)} - \frac{R_3}{R_2 + R_3}\right) E$$

II.3) Le pont est dit équilibré lorsque $U_{AB} = 0$. On équilibre le pont à la température T_0 pour laquelle $R(T) = R_0$. Quelle relation lie alors R_0, R_1, R_2 et R_3 ?

II.4) Cette relation étant vérifiée, la température varie et la résistance de la thermistance devient $R(T) = R_0 + \Delta R$. Exprimer U_{AB} en fonction de ΔR, R_0, R_1 et E uniquement.

II.5) On suppose $\Delta R \ll R_0$. Pour quelle valeur de R_1, la sensibilité $s = \dfrac{U_{AB}}{\Delta R}$ est-elle maximale ?

II.6) On suppose cette valeur choisie dans la suite et on prend $R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$. Calculer R_3.

II.7) Sachant que $E = 10{,}0\,\mathrm{V}$ et que le voltmètre peut déceler une variation $|\Delta U_{AB}|$ de $10\,\mathrm{mV}$, quelle valeur minimale de $|\Delta R|$ peut-on déceler ? À quelle variation de température autour de T_0 cela correspond-il ? Commenter.

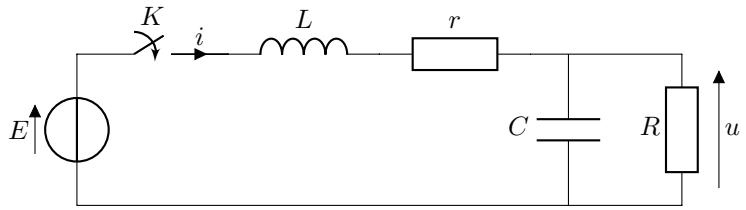
II.8) Entre les points A et B, le pont de Wheatstone se comporte comme une source dont le modèle de Thévenin a pour force électromotrice la tension U_{AB} à vide calculée précédemment, et pour résistance interne la résistance équivalente du circuit entre les bornes A et B lorsque la source de tension E est remplacée par un fil. Déterminer cette résistance interne r lorsque $R(T) = R_0$.

II.9) La mesure de la tension U_{AB} se fait avec un voltmètre qui possède une certaine résistance d'entrée R_e. Comment choisir R_e pour que la tension mesurée ne dépende pas trop du voltmètre utilisé ?

PROBLÈME III

Caractéristique d'une bobine réelle

On étudie le circuit suivant, où $E = 6{,}0\,\text{V}$, $R = 10\,\text{k}\Omega$, $C = 1{,}0\,\mu\text{F}$, et l'association (L, r) modélise une bobine réelle inconnue.



Le circuit étant préalablement en régime stationnaire, on ferme l'interrupteur à un instant noté $t = 0$.

III.1) Déterminer les valeurs de u et i en $t = 0^+$. On justifiera soigneusement.

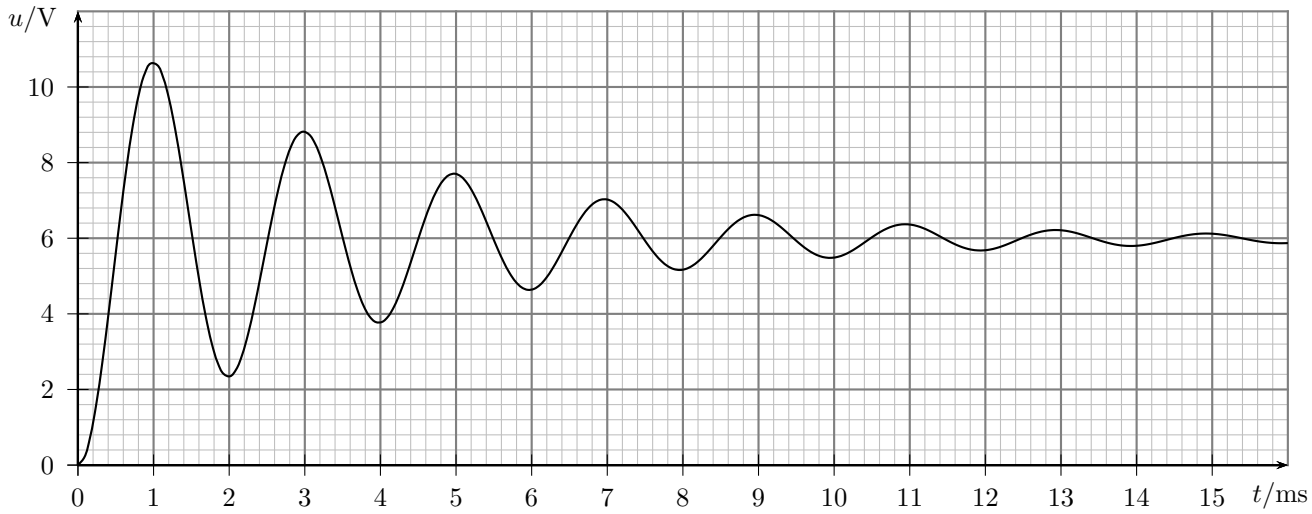
III.2) En utilisant un schéma équivalent, déterminer leurs valeurs u_∞ et i_∞ lorsque $t \to \infty$.

On montre (non demandé) que la tension $u(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$E = \frac{R+r}{R}u + \left(\frac{L}{R} + rC\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$$

III.3) Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité du circuit Q.

On mesure la tension u à l'aide d'une interface d'acquisition et on obtient le résultat ci-dessous.



III.4) Comment peut-on qualifier le régime transitoire ? Que peut-on conclure quant au facteur de qualité ?

L'équation théorique de la tension $u(t)$ est :

$$u(t) = u_\infty\left(1 - e^{-\omega_0 t/(2Q)}\left(\cos(\omega_0\sqrt{1-1/(2Q)^2}\,t) + \frac{1}{\sqrt{(2Q)^2-1}}\sin(\omega_0\sqrt{1-1/(2Q)^2}\,t)\right)\right)$$

III.5) Vérifier qu'elle est effectivement solution de l'équation différentielle et qu'elle vérifie les conditions initiales.

III.6) Montrer que si Q est suffisamment grand, il est approximativement égal au nombre d'oscillations dont l'amplitude est supérieure à environ 4 % de l'amplitude initiale.

III.7) Déterminer graphiquement les valeurs approchées de ω_0 et Q.

III.8) Choisir parmi le jeu de valeurs (L, r) celui qui décrit le mieux les résultats expérimentaux observés :

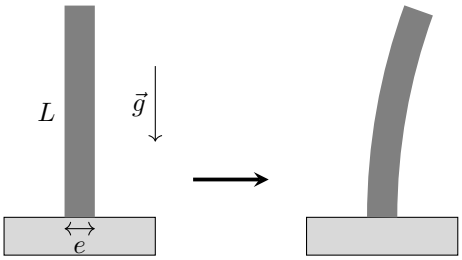
(a) $L = 40\,\text{mH}$, $r = 10\,\Omega$ (b) $L = 40\,\text{mH}$, $r = 40\,\Omega$ (c) $L = 100\,\text{mH}$, $r = 10\,\Omega$ (d) $L = 100\,\text{mH}$, $r = 40\,\Omega$

PROBLÈME IV

Flambage d'une feuille de papier

On étudie les conditions d'apparition du fléchissement d'une lame élastique souple, érigée en position verticale, sous l'action de son propre poids. Ce phénomène est une instabilité dite de flambage.

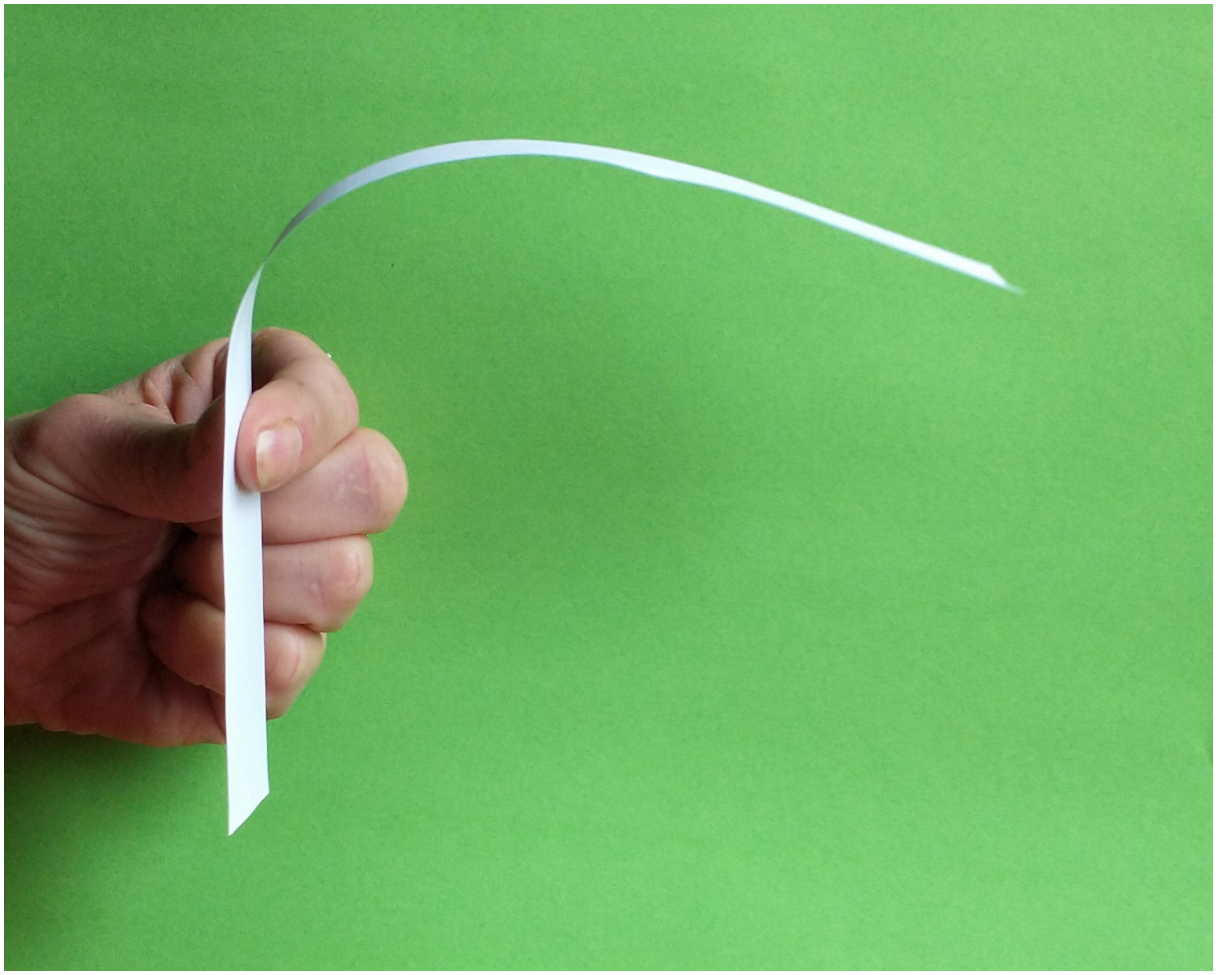
Soit une lame mince parallélépidédique homogène de masse volumique ρ encastrée dans un support horizontal. Sa longueur (dans la direction verticale) est L, les dimensions de sa base b et $e \ll b$ (figure de gauche ci-contre). Sous l'action d'un champ de pesanteur $\vec{g}$ vertical, elle peut se déformer dans la direction perpendiculaire à sa plus petite dimension, en formant un arc de cercle (figure de droite ci-contre).



Si la longueur L est suffisamment faible, la position verticale est stable. Cependant, le fléchissement se produit spontanément dès qu'elle est supérieure à une valeur critique L_c telle que : $L_c = \left(\dfrac{2Ye^2}{\rho g}\right)^{1/3}$, où Y est le module de Young de la lame. Il caractérise l'élasticité du matériau et a la dimension d'une pression.

IV.1) L'expression de L_c peut-elle être prédite par analyse dimensionnelle ? On justifiera soigneusement.

On réalise une expérience avec une feuille de papier A4 (21 cm × 29,7 cm) que l'on découpe selon sa longueur. La feuille est issue d'une ramette de 500 feuilles, qui a pour épaisseur 5,3 cm et pour masse 2,5 kg. On diminue progressivement la longueur de la bande située au dessus de son point de maintien jusqu'à observer le flambage (voir photo ci-dessous).



IV.2) Déterminer l'ordre de grandeur (avec un chiffre significatif) de la valeur de son module de Young Y .

Le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter la démarche suivie même si elle n'a pas abouti, car elle est valorisée dans le barème.