Chapitre 5 : Primitives et équations différentielles

Plan

1 Primitives

On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$. Les fonctions considérées dans cette section sont à valeurs dans $\mathbb{C}$ mais souvent en fait dans $\mathbb{R}$.

Définition 1 *Soit f une fonction définie et continues sur un intervalle I. La fonction F est une **primitive** de f sur I quand F est dérivable sur I et pour tout x de I :*

$$F'(x) = f(x)$$

ou

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

Dans ce cas, on peut noter (Attention : cette notation est pratique mais peut poser des problèmes) :

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Propriété 1 *Si les fonctions F et G sont définies sur un intervalle I et sont toutes 2 primitives d'une même fonction f alors F et G diffèrent d'une constante k.*

Autrement dit : Si : $(\forall x \in I) \quad F'(x) = G'(x)$ alors : $\exists k \in \mathbb{C} \quad (\forall x \in I) \quad F(x) = G(x) + k$.

Rappelons que si f est continue sur un intervalle I, F est une primitive de f sur I, et si a et b sont 2 points de I alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$$

la valeur obtenue ne dépendant pas de la primitive choisie.

Théorème 1 *Étant donné une fonction continue sur un intervalle I et a un point de I.*

1. *La fonction $x \to \int_a^x f(t).\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I nulle en a.*
2. *Si F est une primitive de f sur I alors, pour tout x de I :*

$$F(x) = \int_a^x f(t).\,\mathrm{d}t + F(a)$$

On dit qu'une fonction f est **de classe $\mathcal{C}^1$** sur un intervalle I si elle est dérivable et à dérivée continue sur I.

On peut réécrire le théorème précédent sous la forme :

Propriété 2 *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et a un point de I alors, pour tout $x \in I$:*

$$f(x) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t + f(a)$$

2 Outils de calcul

Le tableau des primitives classiques (à connaitre par coeur !) :

Fonction f	Primitive F	Domaine de validité
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x^p}$	$-\frac{1}{p-1}\frac{1}{x^{p-1}}$	$p \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $x \in \mathbb{R}^*$
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $x \in \mathbb{R}_+*$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\|x\|)$	$x \in \mathbb{R}^*$
e^x	e^x	
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$	$x \in \mathbb{R}_+^*$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	
$\tan(x)$	$-\ln(\|\cos(x)\|)$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k.\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	
$\mathrm{th}(x)$	$\ln(\mathrm{ch}(x))$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$-1 < x < 1$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	

L'"astuce" suivante sera généralisée dans un chapitre ultérieur. Il faut y penser par soi même :

Si $x \neq \pm 1$:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x+1)-(x-1)}{2(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+1)}\right)$$

Du coup sur $]-1, 1[$

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}\left(\ln(1-x) - \ln(1+x)\right)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

La formule suivante est un outil technique important.

Théorème 2 (Intégration par parties) *Soit f et g 2 fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I = [a, b]$. On a :*

$$\int_a^b f'(t).g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t).g(t)]_a^b - \int_a^b f(t).g'(t)\,\mathrm{d}t$$

En termes de primitives, on écrira, si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$:

$$f'(x).g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x).g(x)\right) - f(x).g'(x)$$

$$\int f'(x).g(x)\,\mathrm{d}x = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)\,\mathrm{d}x$$

On peut aussi écrire :

Théorème 3 (Intégration par parties) *Si f est une fonction continue, F est une primitive de f, et g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I = [a, b]$. On a :*

$$\int_a^b f(t).g(t)\,\mathrm{d}t = [F(t).g(t)]_a^b - \int_a^b F(t).g'(t)\,\mathrm{d}t$$

En termes de primitives, on écrira, si f est continue de primitive F et g de classe $\mathcal{C}^1$:

$$f(x).g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F(x).g(x)\right) - F(x).g'(x)$$

$$\int f(x).g(x)\,\mathrm{d}x = F(x).g(x) - \int F(x).g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Cette formule permet en particulier de calculer des primitives pour les fonctions ln et les divers arc.

La seconde formule importante est :

Théorème 4 (Changement de variable (1)) *Soit f une fonction continue sur un segment I et une fonction ϕ à valeurs dans I et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, alors :*

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\phi(u))\phi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Théorème 5 (Changement de variable (2)) *Soit f une fonction continue sur un segment I et une fonction ϕ à valeurs dans I, de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $[\alpha, \beta]$ avec $a = \phi(\alpha)$ et $b = \phi(\beta)$.*

ϕ est alors bijective et :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(u))\phi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Ainsi, pour appliquer cette formule, c'est à dire faire le "changement de variable $t = \phi(u)$", il faut :

- Remplacer les bornes a et b par $\phi^{-1}(a)$ et $\phi^{-1}(b)$ autrement dit les valeurs de u telles que $\phi(u) = a$ et $\phi(u) = b$,
- Remplacer $f(t)$ par $f(\phi(u))$,
- Remplacer $\mathrm{d}t$ par $\phi'(u)du$ qui correspond à la formule : $\mathrm{d}t = \mathrm{d}(\phi(u)) = \phi'(u)\,\mathrm{d}u$

3 Équations différentielles linéaires du premier ordre

On fixe un intervalle I.

3.1 Équation générale

On considère deux fonctions $t \to a(t)$ et $t \to b(t)$ définies (continues) réelles ou complexes sur I.

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** le problème :

Trouver les fonctions $t \to y(t)$ définies et dérivables sur I telles que :

$$(E): \quad y'(t) + a(t) \cdot y(t) = b(t)$$

On dit qu'on fixe une condition initiale en $t_0 \in I$ si on impose de plus $y(t_0) = y_0$ où $y_0 \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On s'intéresse alors en fait au système qu'on appelle **équation différentielle (linéaire du premier ordre) avec condition initiale**, ou **problème de Cauchy** :

$$(E) \begin{cases} y'(t) + a(t) \cdot y(t) = b(t) \\ y(t_0) = \lambda \end{cases}$$

Le **second membre** est la fonction $b(t)$. Si $b = 0$, on dit que l'équation est **homogène** (ou "sans second membre"). Sinon, on s'intéresse dans un premier temps à l'**équation homogène** associée :

$$(E_0) \quad y'(t) + a(t) \cdot y(t) = 0 \text{ c'est à dire } y'(t) = -a(t) \cdot y(t)$$

*Le cas où $a(t) = a$ est une fonction **constante** a été traité dans un chapitre précédent qu'il faut revoir.*

3.2 Équation homogène

On considère sur un intervalle I une équation homogène écrite sous la forme :

$$(E_0) \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0 \text{ ou } \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a(t).y(t) = 0$$

On note $A(t)$ la primitive de $a(t)$ sur I nulle en 0.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a(t)y(t) &= 0 \\ \exp(A(t))y'(t) + a(t)\exp(A(t))y(t) &= 0 \\ \frac{\exp(A(t)) \cdot y(t)}{\mathrm{d}t} &= 0 \end{aligned}$$

Il existe donc un réel λ tel que (avec réciproque vérifiée) :

$$\begin{aligned} \exp(A(t)).y(t) &= \lambda \\ y(t) &= \lambda \exp(-A(t)) \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

Théorème 6 *L'équation différentielle définie sur l'intervalle $I \ni t_0$ avec condition initiale en t_0 (dite **de Cauchy**) :*

$$\begin{cases} y'(t) = -a(t)y(t) \\ y(t_0) = \lambda \end{cases}$$

a une et une seule solution sur l'intervalle I la fonction définie par :

$$y(t) = \lambda.e^{-A(t)}$$

où $A(t)$ est la primitive de $a(t)$ sur I nulle en 0. Plus généralement, si $A(t)$ est une primitive quelconque de $a(t)$ alors l'unique solution est :

$$y(t) = \lambda e^{A(t_0)-A(t)}$$

Concernant les équations sans condition initiale :

Théorème 7 *L'équation différentielle homogène :*

$$y'(t) = -a(t)y(t)$$

où $a(t)$ est une fonction définie (et continue) sur un intervalle I a pour seules solutions sur l'intervalle I les fonctions définies par :

$$y(t) = \lambda.e^{-A(t)}$$

où $A(t)$ est une primitive fixée (quelconque) de $a(t)$ et λ est un paramètre réel (complexe si on cherche les solutions complexes).

On dira dans ces conditions que l'équation différentielle homogène

$$y'(t) = -a(t)y(t)$$

a pour **solution générale**

$$y(t) = \lambda e^{-A(t)}.$$

3.3 Équation avec second membre

On s'intéresse maintenant à l'équation avec second membre définie sur un intervalle I :

$$(E): \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

Imaginons qu'on connaisse une solution fixée (dite **solution particulière**) $y_1(t)$ de (E), alors $y(t)$ est solution de (E) si et seulement si :

$$(y(t) - y_1(t))' = -a(t)(y(t) - y_1(t))$$

autrement dit, si et seulement si $y_0(t) = y(t) - y_1(t)$ est une solution de l'équation homogène :

$$(E_0): \quad y_0'(t) = -a(t)y_0(t).$$

On a donc le résultat suivant :

Théorème 8 *Si la fonction $y_1(t)$ est une solution particulière fixée de (E) alors toute solution de (E) s'écrit sous la forme :*

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t)$$

où $y_0(t)$ est une solution de l'équation homogène (E_0). Réciproquement, si $y_0(t)$ est une solution (quelconque) de (E_0) alors $y(t) = y_0(t) + y_1(t)$ est une solution de (E).

*On dira que : **la solution générale de** (E) est obtenue en ajoutant à **une solution particulière de** (E) **la solution générale de** (E_0).*

La solution générale de (E_0) est donc donnée par $y(t) = y_1(t) + \lambda e^{-A(t)}$ où $A(t)$ est une primitive de $a(t)$ et $y_1(t)$ une solution particulière de (E). Le coefficient λ est déterminé le cas échéant par les conditions initiales.

3.4 Détermination d'une solution particulière de (E)

Il reste à déterminer une solution particulière de (E) :

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

Á défaut de solution simple (voir le chapitre 3), on peut utiliser la méthode dite de **variation de la constante** :

On cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_1(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$$

En pratique, la condition précédente entraine : $\lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}$ et donc on peut prendre :

$$\lambda(t) = \int_{t_0}^{t} b(u)e^{-A(u)}.\, \mathrm{d}u$$

On peut donc toujours trouver une solution particulière au prix du calcul d'une primitive.

Dans le cas où l'équation se met naturellement sous la forme :

$$(E): \quad y'(t) + a(t)y(t) = b_1(t) + b_2(t)$$

il peut être intéressant de chercher une solution particulière $y_1(t)$ à l'équation :

$$(E_1): \quad y'(t) + a(t)y(t) = b_1(t)$$

puis une solution particulière $y_2(t)$ à l'équation :

$$(E_2): \quad y'(t) + a(t)y(t) = b_2(t)$$

On obtient alors une solution particulière à (E) en posant :

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

Cette méthode s'appelle le **principe de superposition.**
En rassemblant les différents résultats, on obtient :

Théorème 9 *L'équation différentielle $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions définies et continues sur un intervalle I avec la condition initiale (dite **de Cauchy**) : $y(t_0) = y_0$ ($t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{C}$) a une et une seule solution qui est définie sur I.*

3.5 Synthèse

Pour résoudre l'équation différentielle (E) : $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$, on suit donc les étapes suivantes :

1. On résout l'équation homogène associée (E_0) : $y'(t) = -a(t)y(t)$. Sa solution générale a la forme $y_0(t) = \lambda e^{-A(t)}$.
2. On cherche une solution particulière de (E) sous une forme simple ou sous la forme : $y_1(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$ (méthode de variation de la constante), éventuellement via le principe de superposition si le second membre est une somme.
3. La solution générale de (E) a alors la forme : $y(t) = y_1(t) + \lambda e^{-A(t)}$.
4. On détermine si besoin λ à l'aide des conditions initiales.

Savoirs et savoirs faire indispensables

Savoirs

Tableau des dérivées et des primitives, formules d'intégration par parties et de changement de variables.

Savoir-faire

Calculs de primitives simples éventuellement par changement de variables, intégration par parties.

Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1 éventuellement par variation de la constante.