Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 5-11-2024.

DM 2 pour le 15/11 : méthode de Cardan

On considère l'équation d'inconnue z complexe où p et q sont réels non nuls (E) :

$$z^3 = pz + q$$

1. Montrer que tout nombre complexe z peut s'écrire sous la forme $z = u + v$ avec u et v vérifiant la relation : $uv = \frac{p}{3}$ (on ne cherchera pas à calculer u et v ici).
   Pour la suite, z est une éventuelle solution de (E) et on écrit $z = u + v$ avec u et v vérifiant la relation : $uv = \frac{p}{3}$
2. Montrer que u et v sont solutions du système :
   $$\begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ u^3v^3 = \dfrac{p^3}{27} \end{cases}$$
   En déduire une équation du second degré (E_c) dont les nombres u^3 et v^3 sont les solutions.
3. On suppose ici que le discriminant, qu'on précisera, de (Ec) est strictement positif.
   (a) Quelles sont les valeurs possibles de u^3 et v^3.
   (b) En déduire les valeurs possibles de u et v puis que z peut prendre 3 valeurs qu'on exprimera à l'aide de j et j^2.
   (c) "Tester" les solutions trouvées et montrer que l'équation (E) a une solution réelle et 2 solutions complexes non réelles conjuguées.
4. On suppose ici que le discriminant de (Ec) est strictement négatif. Dans ce cas, on note alors $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ ses solutions sous forme trigonométrique (rappelons qu'elles sont conjuguées).
   (a) Exprimer alors les valeurs possibles de u et v en fonction de ρ, θ, j et j^2.
   (b) En déduire que z peut prendre 3 valeurs qu'on exprimera en fonction de ρ, θ, j et j^2.
   (c) "Tester" les solutions trouvées et montrer qu'elles sont toutes 3 réelles.
5. Appliquer la méthode précédente pour résoudre :
   $$z^3 = 18z + 35$$
   On donnera les solutions complexes sous forme algébrique.
6. On considère l'équation
   $$(E) : z^3 = 3z + 1$$
   (a) Déterminer l'équation (Ec) associée et la résoudre.
   (b) En déduire les valeurs de u et v possibles sous forme trigonométrique.
   (c) Terminer alors la résolution de (E).