Fiche 21 : Arithmétique.

Exercice 1

Sachant que l'on a $96842 = 256 \times 375 + 842$, déterminer, sans faire la division, le reste de la division du nombre 96842 par chacun des nombres 256 et 375.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation d'inconnues x et y suivante :

$$13x - 31y = 1$$

Exercice 3

Soit a un entier relatif quelconque, démontrer que le nombre $a(a^2 - 1)$ et, plus généralement, $a(a^{2n} - 1)$ est divisible par 6.

Exercice 4

Étant donnés deux nombres relatifs n et p montrer que soit np est pair, soit $n^2 - p^2$ est divisible par 8.

Exercice 5

Justifier le critère de divisibilité par 7 suivant :

Sépare en unités et dizaines puis cherche la différence entre le double des unités et les dizaines. Agis ainsi tant que tu as des dizaines et obtiens zéro ou sept. Ainsi 364 devient 28 puis 14 puis enfin 7.

On pourra écrire une relation de Bezout entre 7 et 10.

Exercice 6

Démontrer que :

1. $2^n + 1$ est divisible par 3 si et seulement si n est impair ;
2. $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7 ;
3. 11 divise $2^{6n+3} + 3^{2n+1}$

Exercice 7

Montrer que les nombres $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ et $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ sont irrationnels.

Exercice 8

Soit $n < m$ 2 entiers naturels, montrer que les nombres $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ et $F_m = 2^{(2^m)} + 1$ sont premiers entre eux.

En déduire une preuve que l'ensemble des entiers est infini.
On pourra calculer modulo F_n