Fiche 22 : Arithmétique.

Exercice 1

Combien 15! admet-il de diviseurs ?

Exercice 2

Trouver 1000 entiers consécutifs non premiers.

Exercice 3

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que :

1. $n \mid n+8$.
2. $n-1 \mid n+11$.
3. $n-3 \mid n^3-3$.

Exercice 4

Trouver tous les entiers relatifs n tels que n^2+n+7 soit divisible par 13.

Exercice 5

Soit $a \geq 2$ un entier et $r \geq 2$ un entier.
On suppose que a^r-1 est un nombre premier.

1. Montrez que r est premier, puis que a vaut 2.
2. Réciproque ?

Exercice 6 : Fonctions d'Euler

Sur $\mathbb{N}^*$, on considère d et σ les fonctions qui a un nombre n associent respectivement :

— $d(n)$ le nombre de ses diviseurs entiers naturels (y compris n lui même).

— $\sigma(n)$ la somme de ses diviseurs entiers naturels (y compris n lui même).

1. Si p est un entier premier et $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer $d(p^k)$ et $\sigma(p^k)$.
2. Montrer que si n et m sont premiers entre eux alors $d(n \times m) = d(n) \times d(m)$ et $\sigma(n \times m) = \sigma(n) \times \sigma(m)$.

Exercice 7

1. Soit a et n des entiers avec $a \geq 2$ et $n \geq 2$ tel que a^n+1 soit premier, montrer que : $(\exists k \in \mathbb{N})\ n = 2^k$.

   On pose le n ième nombre de Fermat comme étant :

   $$F_n = 2^{2^n}+1$$

   On peut vérifier à la main que $F_0 = 2+1 = 3$, $F_1 = 2^2+1 = 5$, $F_2 = 2^4+1 = 17$, $F_3 = 2^8+1 = 257$ et $F_4 = 2^{16}+1 = 65537$ sont premiers.
2. Suivons Euler pour prouver que $F_5 = 2^{32}+1 = ...$ est divisible par 641 ! !

   Pour cela, remarquer que : $641 = 625+16 = 5^4+2^4$ et $641 = 64*10+1 = 2^7*5+1$ et calculer modulo 641.