Fiche 23 : TD du 14-11.

Exercice 1

Éventuellement en utilisant la méthode de la variation de la constante, donner la solution générale pour $x > 0$ de l'équation différentielle d'inconnue y :

$$xy'(x) + y(x) = \cos(x)$$

Exercice 2

On se propose de calculer pour $x \in \mathbb{R}$ une primitive de l'expression : $\sqrt{x^2+1}$.

On rappelle que si u est réel alors $\sinh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$ et $\cosh(u)^2 = \sinh(u)^2 + 1$.

1. Faire le changement de variable $x = \sinh(u)$ pour déterminer une primitive de l'expression : $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, primitive qu'on pourra noter : $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$
2. Faire une intégration par parties pour déterminer une primitive de l'expression : $\sqrt{1+x^2}$, primitive qu'on pourra noter : $\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Exercice 3

On considère les équations différentielles (variable $x \in \mathbb{R}$) :

$$(E) : (1+x^2)y' + 2xy = 1, \quad (E_0) : (1+x^2)y' + 2xy = 0$$

1. Étudier sur $\mathbb{R}$ les fonctions $x \to \frac{1}{1+x^2}$ et $x \to \frac{x}{1+x^2}$
2. Résoudre (E_0) pour $x \in \mathbb{R}$ en donnant sa solution générale.
   On considère f_0 la solution vérifiant $f_0(0) = 1$.
3. Tracer le graphique de f_0 ainsi que celui d'autres solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$.
4. Donner la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$. Donner sur un même graphique l'allure de quelques solutions.

Exercice 4

Dans cet exercice, on cherche les fonctions réelles f définies sur $\mathbb{R}_+^*$, 2 fois dérivables, telles que :
pour tout $x > 0$:

$$x^2 f''(x) = -f(x)$$

problème noté (E).

1. On considère donc f une solution possible de (E).
   On pose de plus : pour $t \in \mathbb{R}$: $F(t) = f(\exp(t))$.
   (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$:
   $$F''(t) - F(t) + F(t) = 0$$
   (b) En déduire les valeurs possibles de F puis de f.
2. Quel est l'ensemble des solutions de (E) ?
3. Déterminer les solutions du problème (P) suivant :
   Chercher les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x > 0$:
   $$f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$