Fiche 24 : Arithmétique.

Exercice 1

Soient a, b des entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer :

1. $(2^a - 1)|(2^{ab} - 1)$;
2. $2^p - 1$ est premier $\Rightarrow$ p est premier ;
3. $2^a - 1 \wedge 2^b - 1 = 2^{a \wedge b} - 1$.

Exercice 2

Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que X est non vide.
2. Montrer que le produit de nombres de la forme $4k + 1$ est encore de cette forme.
3. On suppose que X est fini et on l'écrit alors $X = \{p_1, \ldots, p_n\}$.
   Soit $a = 4p_1p_2 \ldots p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k + 3$.
4. Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a^n + 1$ soit premier.
Montrer que :

$$\exists k \in \mathbb{N}, n = 2^k.$$

Que penser de la conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{2^n} + 1$ est premier ?

Exercice 4

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ et m, n premiers entre eux tels que $a^n = b^m$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = c^m$ et $b = c^n$.