

## Fiche 25 : Polynômes.

### Exercice 1

Que peut-on dire ...

1. ... d'un polynôme qui a une infinité de racines ?
2. ... de 2 polynômes égaux en une infinité de points ?
3. ... d'un polynôme périodique ?

### Exercice 2

Trouver toutes les racines  $\mathbb{C}$ , en déduire les décomposition irréductibles sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  de :

$$Q = X^6 + X^3 + 1, R = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$$

### Exercice 3

Calculer les restes de la division euclidienne du polynôme  $X^n$  par les polynômes :  $X^2 + 3X + 2$ ,  $X^2 + X + 1$  puis  $(X - 1)^2$ .

### Exercice 4

Déterminer pour quelles valeurs de  $n \in \mathbb{N}$  le polynôme :  $P = X^2 + X + 1$  divise le polynôme  $Q = X^{2n} + X^n + 1$ .

Même question avec les polynômes  $P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$  et  $Q = X^{4n} + X^{3n} + X^{2n} + X^n + 1$ .

### Exercice 5

On considère la suite  $(T_n)$  de polynômes donnés par :  $T_0 = 1$ ,  $T_1(X) = X$  et, si  $n \in \mathbb{N}$  :

$$T_{n+1}(X) = 2X.T_n(X) - T_{n-1}(X)$$

1. Préciser  $T_2, \dots, T_5$ .
2. Préciser  $\deg(P_n)$  et le coefficient dominant de  $P_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Montrer que si  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$  :

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

4. Si  $n \in \mathbb{N}$ , résoudre l'équation  $T_n(\cos(\theta)) = 0$ .
5. En déduire que, si  $n \in \mathbb{N}$ , les racines de  $T_n$  et sa factorisation réelle.
6. Utiliser  $T_5$  pour déterminer  $\cos(\pi/10)$ .

### Exercice 6

Montrer que  $\alpha = 2 \cos \frac{2\pi}{7}$  est racine de  $P = X^3 + X^2 - 2X - 1$ . Quelles sont les autres racines ?

Montrer que  $\alpha$  est irrationnel.