Fiche 27 : Polynômes

Exercice 1

Calculer $a^7+b^7+c^7$, où a,b,c sont les racines complexes de $P=X^3-X+1$.

Exercice 2

1. Rappeler la décomposition en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ de X^n-1.
2. En déduire la décomposition en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ de $P=1+X+\cdots+X^{n-1}$.
3. Calculer $P(1)$ et en déduire : $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 3

Soit, pour $n\geq 0$, $P_n(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{X^k}{k!}$.
1. Démontrer que P_n n'admet que des racines simples.
2. Démontrer que, si n est entier P_{2n} n'a pas de racine réelle et P_{2n+1} a une et une seule racine réelle.

Exercice 4

Soit $p\in\mathbb{N}$ et $P(X)=(X+1)^{2p+1}-(X-1)^{2p+1}$.
1. Quel est le degré de P ? son terme dominant ? son terme constant ? sa parité ?
2. Déterminer les racines de P.
3. Montrer que $\forall p\in\mathbb{N}\ \prod\limits_{k=1}^{p}\tan\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)=\sqrt{2p+1}$.

Exercice 5

Montrer que si P est un polynôme réel ou complexe : $(P(X)-X)|(P(P(X))-P(X))$ et $(P(X)-X)|(P(P(X))-X)$
1. Dans le cas où $P(X)-X$ est scindé à racines simples.
2. Dans le cas général (*on pourra écrire la forme développée de* P).

Exercice 6

Soit $P\in\mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(\mathbb{U})\subset\mathbb{U}$ si et seulement si $P=aX^n$ avec $|a|=1$
On pourra calculer $|P(e^{i\theta})|^2$ *pour* θ *réel.*

Exercice 7

Déterminer les polynômes réels unitaires tel que $P'|P$.