Fiche 26 : TD du 21-11

Exercice 1

1. Déterminer un polynôme réel de degré au plus 2 tel que $P(-1) = 1$, $P(0) = -1$ et $P(1) = -1$. Ce polynôme est -il unique ?
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(-1) = 1$, $P(0) = -1$ et $P(1) = -1$.

Exercice 2

Soit $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

1. Vérifier que j est racine de P.
2. En observant de plus que P est pair, le factoriser au mieux dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Exercice 3

On considère la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers définie par $G_0 = 0$, $G_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $G_{n+1} = G_{n-1} + 2G_n$.

On considère par ailleurs la suite de réels donnée par (on admettra que cette définition est possible) :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{Si } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 2} \end{cases}$$

1. Résoudre l'équation $X^2 = 1 + 2X$. On notera $\alpha > \beta$ ses solutions.
2. Donner l'expression de G_n en fonction de n, α et β.
3. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = \frac{G_n}{G_{n+1}}$$
4. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On pourra utiliser l'expression trouvée à la question précédente.
5. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$:
$$G_{n+3} = 5G_{n+1} + 2G_n$$
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: G_{3n} est un multiple de 5.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: G_{4n} est un multiple de 12.

Exercice 4

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et la relation de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_{n+1} = X.P_n - P_{n-1}$$

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est unitaire de degré n.
2. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$:
$$P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$$
3. En déduire les racines de P_n (*Indication : elles sont réelles*) et sa factorisation irréductible réelle.