PROBLÈME I.

Fibre optique

I.1) Le rayon reste confiné à l'intérieur du cœur si la réflexion à l'interface cœur-gaine est totale. C'est le cas lorsque l'angle d'incidence i est supérieur strictement à l'angle d'incidence limite i_ℓ, i_ℓ correspondant à un rayon émergent rasant (angle de réfraction de $\pi/2$).

D'après la deuxième loi de Snell-Descartes pour la réfraction, $n\sin(i_\ell) = n_1\sin(\pi/2) = n_1$ d'où $\boxed{i_\ell = \arcsin(n_1/n)}$.

I.2) Pour le dioptre air-cœur, l'angle de réfraction r vérifie $r = \pi/2 - i < \pi/2 - i_\ell$.

D'après la deuxième loi de Snell-Descartes pour la réfraction, avec l'air assimilé au vide donc d'indice égal à 1, l'angle d'incidence θ vérifie $\sin(\theta) = n\sin(r) < n\sin(\pi/2 - i_\ell)$ puisque la fonction sinus est monotone croissante sur $[0, \pi/2]$. Or $\sin(\pi/2 - i_\ell) = \cos(i_\ell)$ donc $\sin(\theta) < n\cos(i_\ell)$.

La fonction sinus étant monotone croissante, cette condition s'écrit $\theta < \theta_\ell$ avec l'angle limite défini par : $\boxed{\sin(\theta_\ell) = n\cos(i_\ell)}$.

De plus $\cos(i_\ell) = \sqrt{1 - \sin^2(i_\ell)} = \sqrt{1 - (n_1/n)^2}$ donc $\boxed{ON = \sin(\theta_\ell) = \sqrt{n^2 - n_1^2} = 0{,}363}$.

I.3) La vitesse de la lumière dans la fibre d'indice n est $v = c/n$.

Pour une inclinaison d'un angle r pour le rayon à l'intérieur de la fibre, la distance parcourue par la lumière est $d = \dfrac{L}{\cos(r)} = \dfrac{L}{\sin(i)}$. Plus le rayon est incliné, plus la distance à parcourir dans la fibre est grande.

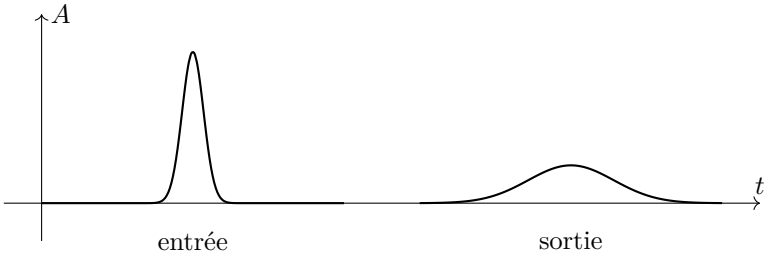
Le temps de parcours est alors :

- minimal pour le rayon parallèle à l'axe de la fibre, qui correspond à l'incidence $\theta = 0$: $t_{\min} = \dfrac{L}{v} = \dfrac{nL}{c}$;
- et maximal pour le rayon le plus incliné qui reste confiné, qui correspond à l'incidence $\theta = \theta_\ell$ et $i = i_\ell$ d'où une distance parcourue $d_\ell = \dfrac{L}{\sin(i_\ell)} = \dfrac{nL}{n_1}$: $t_{\max} = \dfrac{d_\ell}{v} = \dfrac{n^2 L}{n_1 c}$.

L'intervalle de temps de parcours est $\boxed{\delta t = t_{\max} - t_{\min} = \dfrac{n(n-n_1)L}{n_1 c}}$.

I.4) Si $n - n_1 \ll n$ alors $n_1 \approx n$ donc $\boxed{\delta t \approx \dfrac{\delta n\, L}{c}}$.

I.5) Cet écart de propagation provoque l'étalement temporel de l'impulsion : $\boxed{t_0' = t_0 + \delta t}$



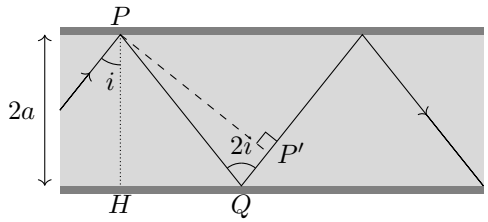
I.6) Le non-recouvrement nécessite que la période $1/F$ soit supérieure à $t_0' \approx \delta t$, soit $\boxed{F\delta t < 1}$.

I.7) Avec l'expression de δt il vient $FL < c/\delta n$. La bande passante vaut donc $\boxed{B = FL_{\max} = \dfrac{c}{\delta n} = 6{,}52 \times 10^9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$.

I.8) Si $F = 100\,\mathrm{MHz} = 1{,}00 \times 10^8\,\mathrm{Hz}$, $\boxed{L_{\max} = \dfrac{B}{F} = 65{,}2\,\mathrm{m}}$. On peut utiliser ce type de fibre pour des transferts de données informatiques au sein d'un bâtiment, mais pas pour des grandes distances.

I.9) On a $PQ = \dfrac{PH}{\cos(i)} = \dfrac{2a}{\cos(i)}$ et $QP' = PQ\cos(2i) = PQ(2\cos^2(i) - 1)$. Ainsi la distance parcourue par le rayon de P à P' est $d(P, P') = PQ + QP' = 2PQ\cos^2(i) = 4a\cos(i)$ ce qui donne un chemin optique $\boxed{(PP') = 4na\cos(i)}$.

Le déphasage est $\boxed{\Delta\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}(PP') = 8\pi n\dfrac{a}{\lambda_0}\cos(i)}$.



I.10) Les points P et P' sont en phase ssi $\Delta\varphi = 0[2\pi]$ soit $8\pi n\dfrac{a}{\lambda_0}\cos(i) = 2\pi m$ pour $m \in \mathbb{Z}$. On en déduit que la propagation guidée est possible pour des angles $i = i_m$ tels que $\boxed{\cos(i_m) = \dfrac{m\lambda_0}{4na}}$.

I.11) Le mode $m = 0$ est le seul à se propager si le mode $m = 1$ n'existe pas, c'est-à-dire qu'il correspond à um angle i trop faible pour être totalement réfléchi. Il faut donc $i_1 < i_\ell$ soit $\cos(i_1) > \cos(i_\ell) = \sqrt{1-(n_1/n)^2}$. Il vient $\boxed{a < \dfrac{\lambda_0}{4\sqrt{n^2-n_1^2}} = \dfrac{\lambda_0}{4\,ON} = 1{,}0\,\mu\text{m}}$.

I.12) S'il n'y a qu'un seul mode, il n'y a pas de dispersion lors de la propagation : $\delta t = 0$. La seule limitation du débit est alors la durée t_0 de l'impulsion, qui est fixe et ne dépend pas de la longueur de la fibre. Il est ainsi possible de propager des signaux lumineux sur de bien plus grandes distances, la seule limitation étant les pertes par dissipation.

PROBLÈME II.

Radars à onde continue

Partie A. Radar Doppler

II.1) La hauteur du son perçu provenant d'une ambulance en mouvement n'est pas la même lorsque le véhicule vient vers nous que lorsqu'il s'éloigne de nous.

II.2) La voiture est à la position $\boxed{x = d_0 - vt}$. L'onde se propageant dans le sens positif de (Ox), son expression générale est $s(x,t) = s(0, t-x/c) = S_m\cos(2\pi f(t-x/c))$. En remplaçant x par la position de la voiture, le signal incident s'écrit : $\boxed{s_i(t) = S_m\cos(2\pi f(1+v/c)t - 2\pi f d_0/c)}$.

II.3) C'est un signal sinusoïdal se mettant sous la forme $s_i(t) = S_m\cos(2\pi f' t + \varphi)$ avec une fréquence apparente $\boxed{f' = f\left(1+\dfrac{v}{c}\right)}$.

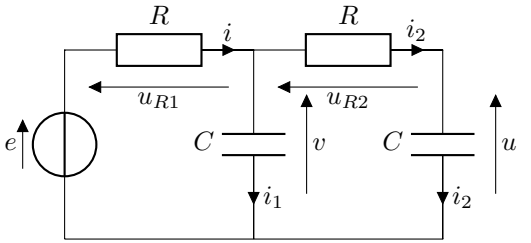
II.4) L'onde réfléchie a pour fréquence apparente $f_r = \dfrac{f'}{1-\dfrac{v}{c}} = f\dfrac{1+\dfrac{v}{c}}{1-\dfrac{v}{c}}$.

Or $\dfrac{1}{1-\dfrac{v}{c}} \approx 1+\dfrac{v}{c}$ pour $v \ll c$ soit $f_r = f\left(1+\dfrac{v}{c}\right)^2 = f\left(1+2\dfrac{v}{c}+\left(\dfrac{v}{c}\right)^2\right)$.

Le terme au carré est négligeable devant le terme linéaire si $v \ll c$ donc $\boxed{f_r \approx f\left(1+2\dfrac{v}{c}\right) = f + \dfrac{2vf}{c}}$.

II.5) v est de l'ordre de $30\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ donc f_D est de l'ordre de 15 kHz. Les valeurs de f et f_r ne diffèrent ainsi qu'au niveau de leur $7^{\text{ème}}$ chiffre significatif. Il faudrait une précision gigantesque, impossible avec des systèmes simples.

Partie B. Mesure de la fréquence Doppler



II.6) D'après la loi des mailles, dans la maille de droite $v = u_{R2} + u$.

Or $u_{R2} = Ri_2$ d'après la loi d'Ohm et $i_2 = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ pour la condensateur.

Donc $\boxed{v = u + RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}$.

II.7) D'après la loi des nœuds, $i = i_1 + i_2$.

Or $i_1 = C\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + RC^2\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$ et $i_2 = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ donc $\boxed{i = 2C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + RC^2\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}}$.

II.8) D'après la loi des mailles, dans la maille de gauche $e = u_{R1} + v$.

Or $u_{R1} = Ri$ avec la loi d'Ohm soit $u_{R1} = 2RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + (RC)^2\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$.

Il vient $\boxed{e = u + 3RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + (RC)^2\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}}$. C'est l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$.

II.9) On met sous forme canonique : $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{3}{RC}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{(RC)^2}u = \dfrac{1}{(RC)^2}e$.

C'est un oscillateur amorti de pulsation propre ω_0 tele que $\omega_0^2 = \dfrac{1}{(RC)^2}$ soit $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$.

La fréquence propre est alors $\boxed{f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi RC}}$.

En prenant $R = 100\,\Omega$ et $C = 10\,\mathrm{nF}$ on obtient $f_0 = 1{,}6 \times 10^5\,\mathrm{Hz}$ qui vérifie $15\,\mathrm{kHz} < f_0 \ll 77\,\mathrm{GHz}$.

II.10) L'équation cacatéristique est $(RC)^2x^2 + 3RCx + 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = (3RC)^2 - 4(RC)^2 = 5(RC)^2 > 0$ donc le régime transitoire est apériodique.

Les racines sont donc réelles : $r = \dfrac{1}{2(RC)^2}\left(-3RC \pm \sqrt{5}RC\right) = -\dfrac{1}{RC} \times \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

La solution générale de l'équation différentielle en régime libre est la solution de l'équation homogène : $\boxed{u(t) = A\exp\left(-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \times \dfrac{t}{RC}\right) + B\exp\left(-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \times \dfrac{t}{RC}\right)}$.

Il y a deux constantes de temps : $\tau = \dfrac{2}{3 \pm \sqrt{5}}RC$. La durée caractéristique du régime transitoire est donc de l'ordre de $\boxed{\tau \sim RC = 1{,}0\,\mu\mathrm{s}}$ avec nos valeurs.

Partie C. Radar FMCW

II.11) La pente vaut $\dfrac{\Delta f}{T}$ donc $\boxed{f_s(t) = f + \Delta f\dfrac{t}{T}}$.

II.12) La cible étant fixe à la distance d_0 l'onde fait un aller-retour de longueur $2d_0$, et l'écho possède donc un retard $\boxed{\tau = \dfrac{2d_0}{c}}$.

La fréquence se conservant lors de la propagation, celle de l'écho vaut $f_r(t) = f_s(t-\tau) = f + \Delta f\dfrac{t-\tau}{T}$ donc $f_m(t) = f_s(t) - f_r(t) = \left(f + \Delta f\dfrac{t}{T}\right) - \left(f + \Delta f\dfrac{t-\tau}{T}\right) = \Delta f\dfrac{\tau}{T}$ qui est constante. Pour conclure, $\boxed{f_m = \dfrac{2d_0\Delta f}{cT}}$.

Inversement $\boxed{d_0 = \dfrac{f_m cT}{2\Delta f} = 22\,\mathrm{m}}$.

II.13) Une incertitude $u(f_m) = \dfrac{1}{T}$ sur la mesure de la fréquence conduit à une incertitude $\boxed{u(d_0) = \dfrac{u(f_m)cT}{2\Delta f} = \dfrac{c}{2\Delta f} = 1{,}00\,\mathrm{m}}$.

Cette précision est satisfaisante pour estimer la présence de véhicules lointains, mais pas suffisamment précise en phase d'approche pour éviter une collision.

II.14) Il pourrait y avoir ambiguïté dans la mesure si le retard était plus grand que la période T. La distance maximale mesurable vérifie $T = 2d_{\max}/c$ soit $\boxed{d_{\max} = \dfrac{cT}{2} = 1{,}5\,\mathrm{km}}$ ce qui est largement suffisant pour l'environnement d'une voiture. En fait, cette valeur élevée est nécessaire pour se laisser de la marge, en pratique il faut que T soit au moins 5 fois plus grand que le retard maximal.

II.15) La fréquence est modifiée simultanément par le retard de l'onde dû à la distance séparant le cible et par l'effet Doppler, il est impossible de distinguer les deux effets. Il n'est pas possible de mesure simultanément la distance et la vitesse.

II.16) Le décalage Doppler $f_D = \dfrac{2fv}{c}$, supposé constant, s'ajoute à la fréquence de l'écho : $f_r(t) = f_s(t-\tau) + f_D = f_s(t) - \tau f_s'(t) + f_D$:

- à la montée, $f_s' = \dfrac{\Delta f}{T}$ donc $f_r = f_s - \tau\Delta f/T + f_D = f_s - f_m + f_D$ d'où $\delta f_a = f_m - f_D$;
- à la descente, $f_s' = -\dfrac{\Delta f}{T}$ donc $f_r = f_s + \tau\Delta f/T + f_D = f_s + f_m + f_D$ d'où $\delta f_b = -f_m - f_D$.

On en déduit $\boxed{f_m = \dfrac{\delta f_a - \delta f_b}{2}}$ et $\boxed{f_D = -\dfrac{\delta f_a + \delta f_b}{2}}$.

II.17) On obtient $\boxed{d_0 = \dfrac{f_m cT}{2\Delta f} = 22\,\mathrm{m}}$ et $\boxed{v = \dfrac{cf_D}{2f} = 9{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$. Il faut réagir, l'impact aura lieu dans 2,5 s !