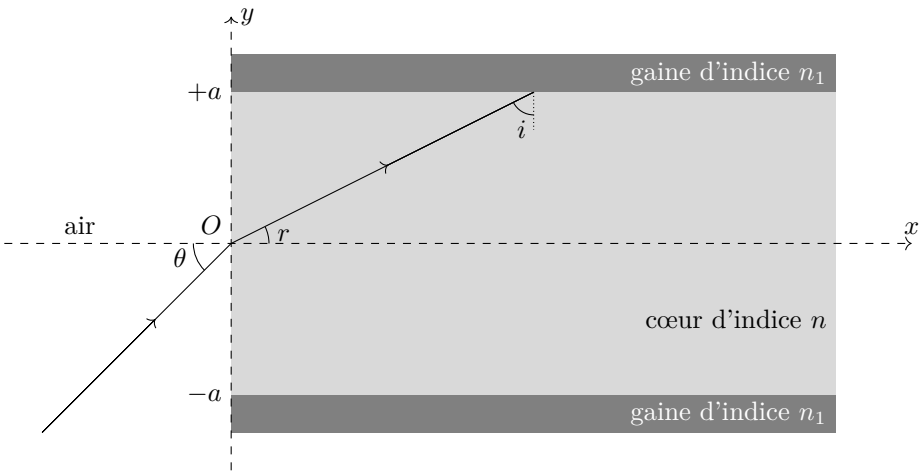
PROBLÈME I

Fibre Optique

Une fibre optique à saut d'indice, représentée sur la figure ci-dessous, est formée d'un cœur cylindrique en verre d'axe (Ox), de diamètre $2a$ et d'indice n entouré d'une gaine optique d'indice n_1 légèrement inférieur à n. Les deux milieux sont supposés linéaires, homogènes, isotropes et transparents. Un rayon situé dans le plan (Oxy) entre dans la fibre au point O avec un angle d'incidence θ. Les différents angles utiles sont représentés sur la figure. L'air est assimilé au vide.

Pour les applications numériques on prendra $n = 1{,}456$ et $n_1 = 1{,}410$. On donne $c = 3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ la vitesse de la lumière dans le vide.



I.1) À quelle condition sur i, angle d'incidence à l'interface cœur / gaine, le rayon reste-t-il confiné à l'intérieur du cœur ? On note i_ℓ l'angle d'incidence limite.

I.2) Montrer que la condition précédente est vérifiée si l'angle d'incidence θ est inférieur à un angle limite θ_ℓ dont on exprimera le sinus en fonction de n et i_ℓ.

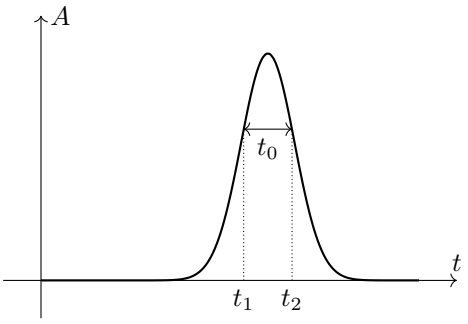
En déduire l'expression de l'ouverture numérique $ON = \sin\theta_\ell$ de la fibre en fonction de n et n_1 uniquement. Faire l'application numérique.

On considère une fibre optique de longueur L. Le rayon entre dans la fibre avec un angle d'incidence θ variable compris entre 0 et θ_ℓ.

I.3) Pour quelle valeur de l'angle θ, le temps de parcours de la lumière dans la fibre est-il minimal ? maximal ? Exprimer alors l'intervalle de temps δt entre le temps de parcours minimal et maximal en fonction de L, c, n et n_1.

I.4) On pose $\delta n = n - n_1$. On admet que pour les fibres optiques $\delta n \ll n$. Montrer dans ce cas que l'expression approchée de δt est $\delta t = \dfrac{\delta n\, L}{c}$. On pourra utiliser cette expression de δt dans la suite du problème.

On injecte à l'entrée de la fibre une impulsion lumineuse d'une durée caractéristique $t_0 = t_2 - t_1$ formée par un faisceau de rayons ayant un angle d'incidence compris entre 0 et θ_ℓ. La figure ci-contre représente l'allure de l'amplitude A du signal lumineux en fonction du temps t.



I.5) Reproduire la figure en ajoutant à la suite l'allure du signal lumineux à la sortie de la fibre. Quelle est la durée caractéristique t_0' de l'impulsion lumineuse en sortie de fibre ?

Le codage binaire de l'information consiste à envoyer des impulsions lumineuses (appelées « bits ») périodiquement avec une fréquence d'émission F.

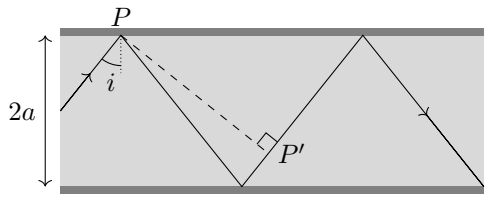
I.6) En supposant t_0 négligeable devant δt, quelle condition portant sur la fréquence d'émission F exprime le non-recouvrement des impulsions à la sortie de la fibre optique ?

Pour une fréquence F donnée, on définit la longueur maximale $L_{\max}$ de la fibre optique permettant d'éviter le phénomène de recouvrement des impulsions. On appelle bande passante de la fibre le produit $B = L_{\max} \cdot F$.

I.7) Exprimer la bande passante B en fonction de c et δn. Faire l'application numérique.

I.8) Pour un débit d'information de $F = 100\,\text{Mbits} \cdot \text{s}^{-1} = 100\,\text{MHz}$, quelle longueur maximale de fibre optique peut-on utiliser pour transmettre le signal ? Commenter la valeur de $L_{\max}$ obtenue.

La condition $\theta < \theta_\ell$ est nécessaire mais non suffisante pour rendre compte du détail de la propagation dans la fibre. Les propriétés ondulatoires de la lumière impliquent que seuls certains angles d'inclinaison conduisent à une propagation guidée. Elles peuvent s'exprimer de la façon suivante : les points du rayon lumineux (ou de son prolongement) appartenant à un plan perpendiculaire à la direction de propagation doivent tous être en phase. Par exemple, sur le schéma ci-dessous, il faut que P et P' soient en phase.



I.9) Exprimer le chemin optique parcouru par l'onde le long du rayon entre P et P'. Pour une onde lumineuse monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0, montrer que le déphasage $\Delta\varphi$ entre l'onde en P et l'onde en P' s'exprime par $\Delta\varphi = 8\pi n \dfrac{a}{\lambda_0}\cos(i)$.

I.10) En déduire l'existence de modes de propagation, valeurs discrètes de i notées i_m où m est un entier, pour lesquelles la propagation est possible. L'entier m est appelé l'ordre du mode.

I.11) Le mode fondamental correspond, par définition, à $m = 0$. Exprimer, puis calculer pour $\lambda_0 = 1{,}5 \times 10^{-6}\,\text{m}$, la valeur maximale que peut prendre a pour que seul ce mode se propage. On dit alors que la fibre est *monomode*.

I.12) Quel intérêt possède ce type de fibre du point de vue de sa bande passante ? Expliquer.

PROBLÈME II

Radars à onde continue

Un système radar à onde continu émet continûment une onde électromagnétique radiofréquence. Son écho après réflexion sur une cible est reçu et analysé en continu, afin de déterminer certaines propriétés de la cible, telles sa position ou sa vitesse.

Partie A. Radar Doppler

L'effet Doppler est la modification de la fréquence d'une onde lorsque l'émetteur et le récepteur sont en mouvement relatif. Si la distance entre émetteur et récepteur diminue, la fréquence perçue est plus élevée que la fréquence émise par lémetteur, et inversement.

II.1) Citer un exemple de la vie courante illustrant l'effet Doppler.

On considère un radar à onde continue émettant dans l'air assimilé au vide une onde monochromatique de fréquence $f = 77\,\text{GHz}$. Cette onde se propage dans le sens positif de l'axe (Ox) et se réfléchit sur une voiture se déplaçant sur l'axe (Ox) à une vitesse constante v en direction du radar. On donne $c = 3{,}00 \times 10^8\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Au voisinage du radar situé en $x = 0$, le signal associée à cette onde a pour expression $s(0,t) = S_m \cos(2\pi f t)$. On note d_0 la distance entre la voiture et la radar à l'instant $t = 0$.

II.2) Exprimer la position de la voiture à l'instant t sur l'axe (Ox) et déterminer l'expression du signal associé à l'onde incidente au niveau de la voiture en fonction de S_m, f, c, v et d_0 et t.

II.3) En déduire que l'onde reçue au niveau du véhicule a une fréquence apparente $f' = f\left(1 + \frac{v}{c}\right)$.

La relation précédente décrit l'effet Doppler dans le cas d'un émetteur fixe et d'un récepteur mobile se rapprochant à la vitesse v. Dans le cas opposé (récepteur fixe, émetteur se rapprochant à la vitesse v), la fréquence de l'onde réceptionnée est $f' = \frac{f}{1 - \frac{v}{c}}$.

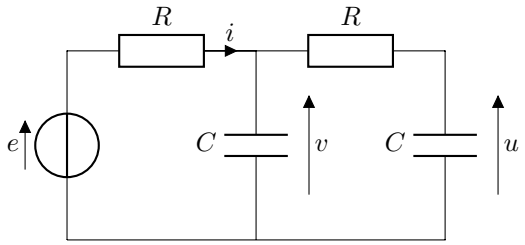
II.4) Montrer que dans le cas où $v \ll c$, la fréquence de l'onde réceptionnée après réflexion sur le véhicule s'exprime de manière approchée : $f_r \approx f + \frac{2vf}{c}$. Dans la suite, on notera $f_D = \frac{2vf}{c}$ nommée fréquence Doppler.

On rappelle que l'on peut faire l'approximation : $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$ pour $x \ll 1$.

II.5) Estimer f_D pour des valeurs usuelles de v. Que penser d'une mesure directe de f et f_r dans le but d'en déduire f_D ?

Partie B. Mesure de la fréquence Doppler

Pour déterminer f_D on utilise un système électronique, qui comporte notamment le circuit suivant :



II.6) Exprimer v en fonction de R, C, $u(t)$ et ses dérivées.

II.7) Exprimer i en fonction de R, C, $u(t)$ et ses dérivées.

II.8) En déduire que la tension $u(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(RC)^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + 3\,RC \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = e.$$

II.9) La fréquence propre f_0 de ce circuit doit vérifier $f_D < f_0 \ll f$. Proposer des valeurs réalistes de R et C qui permettent de réaliser cette condition.

II.10) Donner la forme générale de $u(t)$ en régime libre (c'est-à-dire pour $e = 0$). Quel type de régime transitoire est observé ? Quelle est l'ordre de grandeur de la durée caractéristique de ce régime ?

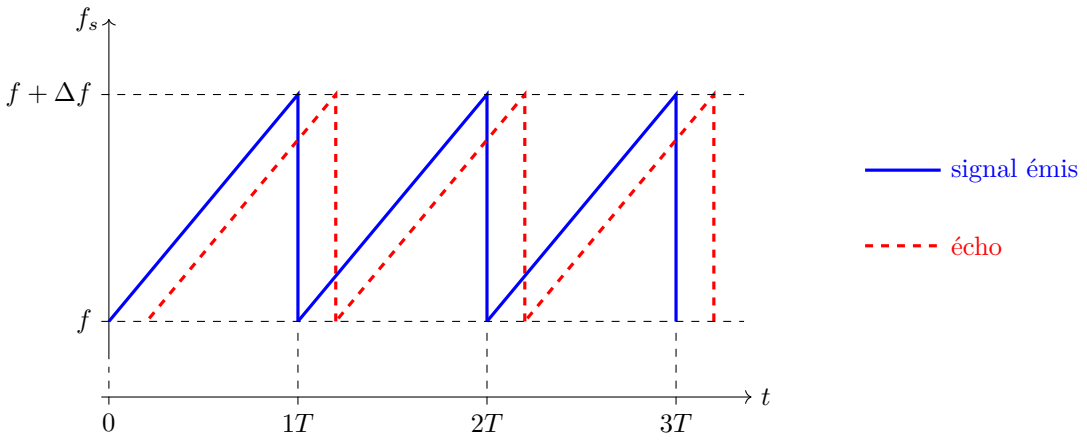
Partie C. Radar FMCW

L'ACC, ou *Adaptive Cruise Control* en anglais, est un système de régulation de vitesse. Il fonctionne en ajustant automatiquement la vitesse du véhicule pour maintenir une distance sécuritaire par rapport aux autres véhicules sur la route.

Le radar à onde continue tel qu'il a été présenté plus haut ne permet pas de mesurer la distance du radar à la cible. Une possibilité pour y remédier est d'utiliser un radar à onde continue modulé en fréquence ou radar FMCW (pour *Frequency Modulated Continuous Wave*). Ce radar émet un « chirp », signal sinusoïdal dont la fréquence instantanée f_s évolue au cours du temps.

D'une manière générale, on peut écrire $s(t) = S_m \cos(\phi(t))$ et définir une fréquence instantanée : $f_s(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$.

Dans le cas d'un radar FMCW à modulation en dents de scie, la fréquence instantanée selon le graphe représenté ci-dessous, où $T = 10\,\mu\mathrm{s}$, $f = 77\,\mathrm{GHz}$ et $\Delta f = 150\,\mathrm{MHz}$. Sur le même graphe, on a représenté la fréquence $f_r(t)$ de l'écho dans le cas où le radar vise une cible fixe à la distance d_0.



II.11) A partir de ce graphe, établir la loi de variation de la fréquence $f_s(t)$ sur une période, en fonction de t, f, Δf et T.

On appelle $f_m = f_s - f_r$ le décalage en fréquence entre le signal émis et le signal réfléchi à un instant donné. Ce décalage peut être mesuré par une méthode analogue à celle décrite dans la partie B pour mesurer f_D.

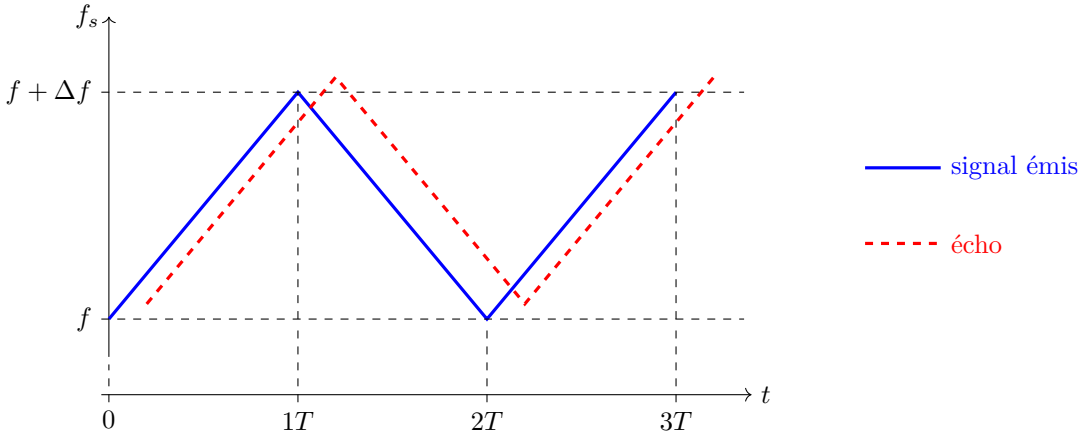
II.12) Exprimer le retard τ de l'écho par rapport à l'onde émise en fonction de d_0 et c, puis déterminer le décalage f_m en fonction de d_0, Δf, T et c.
Calculer la distance d_0 pour un décalage $f_m = 2{,}2\,\text{MHz}$.

II.13) La précision sur la mesure de f_m est de $1/T$. En déduire la précision de la mesure de la distance d_0 à la cible. Commenter.

II.14) Quelle est la distance maximale à laquelle la cible peut se trouver sans qu'il n'y ait ambiguïté dans la mesure ? Faire l'application numérique et commenter.

II.15) On considère maintenant que la cible est en mouvement, par exemple qu'elle se rapproche du radar avec une vitesse v. Peut-on alors accéder à la vitesse et à la distance de la cible ? Justifier.

Pour pallier ce problème, on peut choisir une modulation triangulaire de la fréquence de l'onde émise, comme indiqué sur la figure ci-dessous. On effectue alors deux mesures du décalage en fréquence $\delta f = f_s - f_r$ entre les signaux émis et réfléchis, δf_a sur la partie ascendante de la variation de fréquence et δf_b sur la partie descendante.



II.16) Comment peut-on accéder à f_m et f_D à l'aide des valeurs de δf_a et δf_b ?

On pourra considérer que f_D est constante car la fréquence f_s varie peu en valeur relative, et que f_m est constante à l'échelle d'une période du signal, la distance n'ayant pas le temps de changer significativement.

II.17) Application numérique : on mesure $\delta f_a = 2{,}1954\,\text{MHz}$ et $\delta f_b = -2{,}2046\,\text{MHz}$. Déterminer la vitesse de la cible relativement au radar et sa distance au radar à l'instant de la mesure.