Fiche 28 : Td du 28-11

Exercice 1

Calculer le pgcd D des polynômes A et B définis ci-dessous. Trouver des polynômes U et V tels que $D = AU + BV$.

1. $A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$.
   On cherchera des racines simples de A et B.
2. $A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X$ et $B = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1$.

Exercice 2

Décomposer $X^{12} - 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ $P = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$ sachant qu'il admet une racine triple.

Exercice 4

Soit $P = X^4 - 6X^3 + 7X^2 - 18X - 8$.
Trouver $Q \in \mathbb{R}[X]$ unitaire tel que $\deg(Q) = \deg(P - Q^2) = 2$, et $P - Q^2$ a une racine double.
Factoriser alors P sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

1. Démontrer l'existence d'une unique suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
   — $T_0(X) = X$.
   — Pour tout entier naturel n, $\tan^{(n)}$, dérivée n-ième de la fonction tan, vérifie :
   $$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x)).$$
   On explicitera une relation de récurrence vérifiée par les polynômes T_n et T_{n+1}.
2. Expliciter les polynômes T_1, T_2, T_3.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que les coefficients du polynôme T_n sont des entiers naturels. Quel est le degré du polynôme T_n et sa parité éventuelle ?
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\tan^{(2n)}(0) = 0$ et que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$: $\tan^{(n)}(x) \geq 0$.

Exercice 6

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe $S, T \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = S^2 + T^2$ (on utilisera la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$). *Indications :*

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, déterminer $c, d \in \mathbb{R}$ tels que : $ab = c^2 - d^2$, vérifier que $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2$.
2. Résoudre le problème pour P de degré 2.
3. Conclure.