Fiche 30 : TD du 05-12

Exercice 1

1. Déterminer la factorisation réelle et la factorisation complexe du polynôme : $P = X^3 + 1$.
2. En déduire la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction : $\dfrac{1}{X^3 - 1}$
3. En déduire une primitive de l'expression :
$$\int \frac{x^3}{x^3+1}$$
On précisera le domaine de validité du calcul fait.

Exercice 2

On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = X$, et :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad T_{n+2}(X) = 2X.T_{n+1}(X) - T_n(X)$$

1. Calculer T_2, T_3, T_4, et T_5.
2. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est de degré n et que son terme dominant est $2^{n-1}X^n$.
3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $T_n(1) = 1$ et $T_n'(1) = n^2$.
4. Montrer que : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$T_n(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha)$$
5. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, les racines de T_n sont données par $x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ notation qu'on conservera dans la suite.
6. En déduire la décomposition en facteurs irréductibles réelle du polynôme T_n ($n \in \mathbb{N}^*$).
7. Toujours pour $n \in \mathbb{N}^*$, établir l'égalité
$$\frac{T_n'}{T_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X - x_k}$$
8. En déduire que
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 - x_k} = n^2$$
9. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$:
$$\left(1 - X^2\right) T_n'' - XT_n' + n^2 T_n = 0$$

Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-X)^k}{k!}$$

1. Montrer que P_n a au moins une racine réelle.
2. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$
$$P_n'(X) = -P_n(X) - \frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
3. En déduire que, si $n \in \mathbb{N}$, les racines de P_n (réelles ou complexes) sont toutes simples.
4. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$:
$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^{2k}}{(2k)!} \left(1 - \frac{X}{2k+1}\right)$$

5. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, les racines réelles de P_n sont toutes comprises dans l'intervalle $[1, 2n+1]$.
   On pourra raisonner par l'absurde.
6. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{cases} P'_{n+1} = -P_n - \frac{X^{2n+2}}{(2n+2)!} \\ P''_{n+1} = P_n \end{cases}$$
   Montrer que le polynôme pour $n \in \mathbb{N}$: P_n admet une unique racine réelle notée u_n (*On pourra procéder par récurrence*).
7. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
   On pourra calculer $P_{n+1}(u_n)$. On peut montrer (ce n'est pas demandé) que si x est réel $P_n(x) \to exp(-x)$ pour $n \to \infty$