# Chapitre 8 : Ensemble des nombres réels et suites numériques.

## 1 Ordre des réels

### 1.1 Inégalités

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est muni de relations d'**ordre** ($\leq$, $\geq$, $<$,$>$) permettant de comparer 2 réels et vérifiant (entre autres ...) les règles opératoires suivantes (pour tous réels $a, b, c, d$) :

- Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$ ;
- Si $a \leq b$ et $0 \leq c$ alors $ac \leq bc$ ;
- Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $0 \leq ac \leq bd$ ;
- Si $a \leq b$ alors $-a \geq -b$ ;
- Si $0 < a \leq b$ alors $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

Un réel $a$ est dit :

- **positif** quand $a \geq 0$,
- **strictement positif** quand $a > 0$,
- **négatif** quand $a \leq 0$,
- **strictement négatif** quand $a < 0$.

On a de plus la "règle des signes" pour le produit :

| | $b$ positif | $b$ négatif |
|---|---|---|
| $a$ positif | $a \times b$ positif | $a \times b$ négatif |
| $a$ négatif | $a \times b$ négatif | $a \times b$ positif |

Si $a$ est un réel quelconque, $a^2 \geq 0$ avec égalité si et seulement si $a = 0$.

## 1.2 Valeur absolue

Rappelons que si $a$ est un réel positif alors $|a| = a$ et si $a$ est négatif alors $|a| = -a$.

**Propriété 1** *Si $a$, $b$ sont des réels quelconques :*

$$|ab| = |a|\,|b|$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

La dernière relation s'appelle "inégalité triangulaire".

Rappelons que si $a$ est un réel positif alors $|a| = a$ et si $a$ est négatif alors $|a| = -a$. En particulier, dans tous les cas : $\sqrt{a^2} = |a|$ et, si $b \geq 0$ :

$$a^2 = b \iff a = \pm\sqrt{b}$$

Si $a$ est un réel et si $b$ est un réel positif, alors l'ensemble des réels $x$ tel que $|a - x| \leq b$ est un segment de bornes $a - b$ et $a + b$, de longueur $2b$, dit autrement :

$$\{x \in \mathbb{R} / \, |x - a| \leq b\} = [a - b, a + b]$$

## 1.3 Parties positives et négatives

Si $x$ est réel, on pose :

- $x^+ = x$ si $x$ est positif, $x^+ = 0$ si $x$ est négatif. $x^+$ est la **partie positive** de $x$.
- $x^- = 0$ si $x$ est positif, $x^- = -x$ si $x$ est négatif. $x^-$ est la **partie négative** de $x$.

Ainsi dans tous les cas : $x^+$ et $x^-$ sont positifs et :

$$x^+ + x^- = |x| \qquad x^+ - x^- = x$$

Ces notations s'utilisent en pratique surtout pour des fonctions réelles.

Si $f$ est une fonction et $x$ est un réel tel que $f(x)$ est défini :

- $f^+(x) = f(x)$ si $f(x)$ est positif, $f^+(x) = 0$ si $f(x)$ est négatif. $f^+$ est la **partie positive** de $f$.
- $f^-(x) = 0$ si $f(x)$ est positif, $f^-(x) = -f(x)$ si $f(x)$ est négatif. $f^-$ est la **partie négative** de $f$.

La fonction sgn est parfois bien pratique :

$$\operatorname{sgn} \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) = +1 \text{ si } x > 0 \\ \operatorname{sgn}(0) = 0 \\ \operatorname{sgn}(x) = -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Notons que si $x$ et $y$ sont réels : $\operatorname{sgn}(x.y) = \operatorname{sgn}(x).\operatorname{sgn}(y)$.

## 2 Ensembles de nombres.

Rappelons que $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels** : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, 18, \dots\}$, $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **entiers relatifs** : $\mathbb{Z} = \{\dots, -10, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, 18, \dots\}$

On note si $a$ et $b$ sont entiers (relatifs) : $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des entiers (relatifs) compris (au sens large) entre $a$ et $b$.

Un nombre réel $x$ est dit **décimal** si il a une écriture décimale finie autrement dit si on peut écrire : $x = \dfrac{k}{10^n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{k}{10^n} \ /k \in \mathbb{Z} \ , \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Un nombre réel $x$ est dit **rationnel** si il est le quotient de 2 entiers autrement dit si on peut écrire : $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ (on peut de plus imposer à la fraction précédente d'être irréductible) :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \ /p \in \mathbb{Z} \ , \ q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Passons sur la construction de $\mathbb{R}$ (difficile)... On a ainsi des ensembles de nombres :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Les nombres réels non rationnels sont dit **irrationnels** et l'ensemble des irrationnels est noté $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. On verra (on a vu...) que les nombres $\sqrt{2}$, $e = \exp(1)$, $\pi$ sont des irrationnels. Il y en a bien d'autres. Mieux que ça :

**Propriété 2** *Si $a < b$ sont des réels, il existe $q$ un rationnel et $x$ un irrationnel tels que $a < r < b$ et $a < x < b$.*

Autrement dit tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

Sachant que $\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$, pour unifier certaines notations, on note $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \{-\infty\} \cup ]-\infty, +\infty[ \cup \{+\infty\}$. $\overline{\mathbb{R}}$ est la **droite réelle achevée**.

On convient alors, pour tout réel $x$ :

$$-\infty < x < +\infty$$

## 3 Valeurs approchées d'un réel

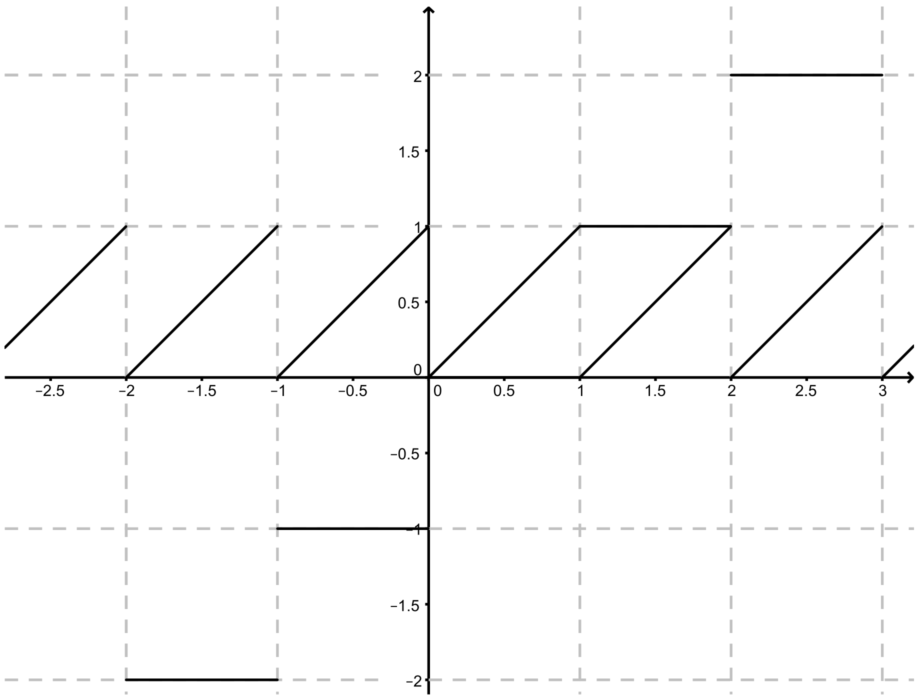
Si $x$ est un réel, il existe un unique entier noté $[x]$ (*floor* pour Python) et appelé **partie entière** de $x$ tel que :

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

On obtient ainsi une fonction "en escalier" croissante.

Si $x$ est réel, $x - [x]$ (parfois noté $\{x\}$) est la partie fractionnaire de $x$. C'est un réel de $[0, 1[$.

À noter que $x$ (réel) est un entier si, et seulement si $[x] = x$ c'est à dire $\{x\} = 0$.




Si $x$ est un réel et $n$ un entier naturel, on a

$$\frac{[10^n.a]}{10^n} \leq a < \frac{[10^n.a] + 1}{10^n}$$

On pose donc $d_n = \dfrac{[10^n.x]}{10^n}$ et $d'_n = \dfrac{[10^n.x]}{10^n}$. Ce sont des nombres décimaux. On a :

$$d_n \leq x < d'_n \text{ et } d'_n - d_n = 10^{-n}$$

$d_n$ et $d'_n$ sont les **valeurs décimales approchées** respectivement par défaut et par excès de $x$.

On observe que la suite $(d_n)$ tend en croissant vers $x$ et que la suite $d'_n$ tend en décroissant vers $x$. En pratique, si $x$ est positif, $d_n$ s'obtient à partir $x$ en "enlevant" toutes les décimales de $x$ au delà de la $n$-ième.

# 4 Majorant, minorant

Soit $A$ une partie (non vide) de $\mathbb{R}$.

Soit $M$ un nombre réel quelconque.

**Définition 1** *$M$ est **un majorant** de $A$ quand :*

$$(\forall x \in A) \quad x \leq M$$

*$M$ est **un minorant** de $A$ quand :*

$$(\forall x \in A) \quad M \leq x$$

La partie $A$ est dite **majorée** quand elle admet au moins un majorant (fini). Elle est dite **minorée** quand elle admet au moins un minorant (fini). Elle est dite **bornée** quand elle est à la fois minorée et majorée.

On convient que $+\infty$ majore toute partie de $\mathbb{R}$ et que $-\infty$ minore toute partie de $\mathbb{R}$.

Ainsi si la partie $A$ est majorée, on note $\mathrm{Sup}(A) < +\infty$, $\mathrm{Sup}(A) = +\infty$ sinon.

Si la partie $A$ est minorée, on note $\mathrm{Inf}(A) > -\infty$, $\mathrm{Inf}(A) = -\infty$ sinon.

Soit maintenant $a$ un élément de $A$.

**Définition 2** *$a$ est **le plus grand élément** de $A$ quand :*

$$(\forall x \in A) \quad x \leq a$$

*On note :*

$$a = \mathrm{Max}(A)$$

*$a$ est **le plus petit élément** de $A$ quand :*

$$(\forall x \in A) \quad a \leq x$$

*On note :*

$$a = \mathrm{Min}(A)$$

# 5 Bornes supérieure et inférieure

Soit $A$ une partie (non vide) de $\mathbb{R}$.
Soit $M$ un réel quelconque.

**Définition 3** *$M$ est **la borne supérieure** de $A$ quand il est le plus petit des majorants possibles de $A$ c'est à dire :*

$$(\forall a \in A) \quad a \leq M \quad \textit{et} \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists a_\epsilon \in A) \quad M - \epsilon < a_\epsilon \leq M$$

*On note alors :*

$$M = \mathrm{Sup}(A)$$

*Si la partie A n'est pas majorée, on pose :*

$$+\infty = \mathrm{Sup}(A)$$

*m est* ***la borne inférieure*** *de A quand il est le plus grand des minorants possibles de A, c'est à dire :*

$$(\forall a \in A) \quad m \leq a \quad \textit{et} \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists a_\epsilon \in A) \quad m \leq a_\epsilon < m + \epsilon$$

*On note alors :*

$$m = \mathrm{Inf}(A)$$

*Si la partie A n'est pas minorée, on pose :*

$$-\infty = \mathrm{Inf}(A)$$

Les notions de Max et Sup sont reliés par la propriété suivante :

**Propriété 3** *A est une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

*La partie A admet un plus grand élément si* $\mathrm{Sup}(A) \in A$ *et alors* $\mathrm{Sup}(A) = \mathrm{Max}(A)$.

*La partie A admet un plus grand petit élément si* $\mathrm{Inf}(A) \in A$ *et alors* $\mathrm{Inf}(A) = \mathrm{Min}(A)$.

Le théorème suivant (admis) dit "des bornes Sup et Inf" nous assure dans tous les cas intéressants l'existence des bornes Sup et Inf.

**Théorème 1** *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

*Si la partie A est majorée alors elle admet une borne supérieure (dans $\mathbb{R}$). Si la partie A est minorée alors elle admet une borne inférieure (dans $\mathbb{R}$).*

Dit autrement :

**Théorème 2** *Toute partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure éventuellement infinies.*

Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ :

- La partie $A$ est majorée si et seulement si $\mathrm{Sup}(A) < +\infty$.
- La partie $A$ est minorée si et seulement si $-\infty < \mathrm{Inf}(A)$.
- La partie $A$ est bornée si et seulement si $-\infty < \mathrm{Inf}(A) \leq \mathrm{Sup}(A) < +\infty$.
- La partie $A$ admet un plus grand élément si $\mathrm{Sup}(A) \in A$ et alors $\mathrm{Sup}(A) = \mathrm{Max}(A)$.
- La partie $A$ admet un plus grand petit élément si $\mathrm{Inf}(A) \in A$ et alors $\mathrm{Inf}(A) = \mathrm{Min}(A)$.

Un **intervalle** de $\mathbb{R}$ est une partie $I$ de $\mathbb{R}$ vérifiant : Si $a$ et $b$ sont dans $I$ alors $[a, b]$ est dans $I$.

Si $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ alors, selon sa nature, il est égal à $[\mathrm{Inf}(I), \mathrm{Sup}(I)]$, $]\,\mathrm{Inf}(I), \mathrm{Sup}(I)]$, $[\mathrm{Inf}(I), \mathrm{Sup}(I)[$, $]\,\mathrm{Inf}(I), \mathrm{Sup}(I)[$.

Si $\mathrm{Inf}(I)$ et $\mathrm{Sup}(I)$ sont finis et $I = [\mathrm{Inf}(I), \mathrm{Sup}(I)] = [\mathrm{Min}(I), \mathrm{Max}(I)]$, on dit $I$ est un **segment**.

# 6 Rappels de base.

Une suite réelle est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles :

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \left\{ u = (u_n) \quad : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \in \mathbb{R} \end{cases} \right\}$$

La suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** quand : $\mathrm{Sup}_{n\in\mathbb{N}}\, u_n < +\infty$.

La suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** quand : $\mathrm{Inf}_{n\in\mathbb{N}}\, u_n > -\infty$.

La suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** quand elle est à la fois minorée et majorée, ou de manière équivalente quand la suite $|u| = (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** quand $n \leq n' \implies u_n \leq u_{n'}$ ou de manière équivalente : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \leq u_{n+1}$.

Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement croissante** quand $n < n' \implies u_n < u_{n'}$ ou de manière équivalente : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n < u_{n+1}$.

Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** quand $n \leq n' \implies u_n \geq u_{n'}$ ou de manière équivalente : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \geq u_{n+1}$.

Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement décroissante** quand $n < n' \implies u_n > u_{n'}$ ou de manière équivalente : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} < u_n$ .

Une suite est dite (resp. strictement) **monotone** quand elle est (resp. strictement) croissante ou (resp. strictement) décroissante.

# 7 Limite d'une suite

## 7.1 Limite finie

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $l$ un réel.

**Définition 4** *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $l$ ou **a la limite** $l$ (en $+\infty$) et on note :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} u = l \quad \text{ou} \quad u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$$

*quand :*

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N_\epsilon \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_\epsilon) \quad |u_n - l| \leq \epsilon \quad \textit{c'est à dire} \quad l - \epsilon \leq u_n \leq l + \epsilon$$

Une suite est dite **convergente** si elle a une limite (finie). Dans ce cas, la limite est unique et la suite est bornée. Elle est dite **divergente** si elle n'a pas de limite finie.

**Propriété 4** *Une suite convergente est bornée.*

Concernant les inégalités, on a les règles suivantes (attention au passage aux inégalités larges !), $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant des suites et $l$ et $l'$ des réels :

**Propriété 5** *Si :* $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n < v_n$ *et* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ *et* $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l'$ *alors :*

$$l \leq l'$$

*Si :* $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n < A \in \mathbb{R}$ *et* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ *alors :*

$$l \leq A$$

Les règles de calcul suivantes permettent de calculer rapidement les limites finies simples :

**Théorème 3** *Si les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont convergentes et si* $\lambda$ *est un réel alors les suites* $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(u_n.v_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(\lambda.u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *le sont aussi. En particulier, l'ensemble des suites convergentes est un espace vectoriel réel.*
*On a de plus les règles opératoires (les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont supposée convergentes, dans le dernier cas,* $l \neq 0$*) :*

| suite | $u_n$ | $v_n$ | $u_n + v_n$ | $u_n.v_n$ | $\lambda u_n$ | $\frac{1}{u_n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| limite | $l$ | $l'$ | $l + l'$ | $l.l'$ | $\lambda l$ | $\frac{1}{l}$ |

**Propriété 6** *Si la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers 0 et si la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée alors la suite* $(u_n.v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers 0.*

En pratique, on démontre d'abord cette propriété puis le théorème qui précède.

**Théorème 4** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des suites telles que :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq v_n \leq w_n$$

*Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers la même limite* $l$ *alors* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $l$ *:*

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$$

Par application directe, on a :

**Propriété 7** *Si* $|u_n| \leq v_n$ *et* $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *alors :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

## 7.2 Limite infinie

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

**Définition 5** *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***tend vers*** *$+\infty$ ou* ***a la limite*** *$+\infty$ (en $+\infty$) et on note :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \text{ ou } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

*quand :*

$$(\forall A \in \mathbb{R}_+)(\exists N_A \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_A) \quad u_n \geq A$$

*On dit que la suite $(u_n)$* ***tend vers*** *$-\infty$ ou* ***a la limite*** *$-\infty$ (en $+\infty$) et on note :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \quad ou \quad u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

*quand :*

$$(\forall A \in \mathbb{R}_-)(\exists N_A \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_A) \quad u_n \leq A$$

Rappel : une suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ est divergente.

**Théorème 5** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites telles que :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq v_n$$

*Si $(u_n)$ tend vers $+\infty$ alors $v_n$ tend vers $+\infty$.*

*Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ alors $u_n$ tend vers $-\infty$.*

Concernant les règles de calcul, on arrive vite sur des cas d'indétermination (notés ici FI) : il n'y a pas de règle générale, il faut voir au cas par cas. Le tableau suivant à lire ligne par ligne au sens "la suite tend vers" donne quelques cas classiques :

| $u_n$ | $v_n$ | $u_n + v_n$ | $u_n.v_n$ | $\dfrac{u_n}{v_n}$ | $\frac{1}{u_n}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $l$ finie non nulle | $l'$ finie non nulle | $l + l'$ | $l.l'$ | $\dfrac{l}{l'}$ | $\frac{1}{l}$ |
| $l > 0$ finie | $0^+$ | l | 0 | $+\infty$ | $\frac{1}{l}$ |
| $l > 0$ finie | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | $\frac{1}{l}$ |
| $0^+$ | $0^+$ | 0 | 0 | FI "$\dfrac{0}{0}$" | $+\infty$ |
| $0^+$ | $+\infty$ | $+\infty$ | FI "$0.\infty$" | 0 | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $\infty$ | $+\infty$ | FI "$\dfrac{\infty}{\infty}$" | 0 |
| $+\infty$ | $-\infty$ | FI "$\infty - \infty$" | $-\infty$ | FI "$\dfrac{\infty}{\infty}$" | 0 |

Ici, on note $u_n \to 0^+$ pour $u_n \to 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

# 8 Théorèmes d'existence de limites

Le théorème clef concernant l'existence de limites est le suivant.

**Théorème 6 (Théorème de la limite monotone)** *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite monotone alors elle admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

*Plus précisément :*

- *Si $(u_n)$ est croissante, alors elle converge (vers une limite finie) si et seulement si elle est majorée, sinon elle tend vers $+\infty$. Dans les 2 cas, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{Sup}_{n\in\mathbb{N}}\, u_n$$

- *Si $(u_n)$ est décroissante, alors elle converge (vers une limite finie) si et seulement si elle est minorée, sinon elle tend vers $-\infty$. Dans les 2 cas, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{Inf}_{n\in\mathbb{N}}\, u_n$$

On rencontrera souvent la situation des "suites adjacentes".

**Théorème 7 (Première version)** *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont 2 suites telles que :*

- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,*
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \le v_n$.*

*alors les suites $(u_n)$ et $v_n$ sont convergentes : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l'$ avec $l \le l'$.*

**Théorème 8 (Seconde version : "vrai théorème des suites adjacentes")** *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont 2 suites telles que :*

- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,*
- *$v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,*

*alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et convergent vers la même limite $l$ et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ :*

$$u_n \le u_{n+1} \le l \le v_{n+1} \le v_n$$

*Dans ce cas, on dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes**.*

# 9 Suites extraites

Soit $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha(n) \ge n$. Une **suite extraite** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite du type $(u_{\alpha(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Par exemple, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Propriété 8** *Si* $(u_{\alpha(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite extraite de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ *(*$l \in \overline{\mathbb{R}}$*) alors* $u_{\alpha(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$

En particulier, il suit que si on peut extraire d'une même suite 2 suites tendant vers des limites différentes alors la première n'a pas de limite (finie ou infinie). Attention aux (pseudo...)réciproques de cette propriété ... Cependant :

**Propriété 9** *Si les suites* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *tendent vers la même limite* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ *alors* $u_n$ *tend vers* $l$.

Un théorème célèbre :

**Théorème 9 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)** *De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.*

# 10 Quelques propriété des ensembles de nombres

**Définition 6** *Une partie de* $\mathbb{R}$ *est dite* ***dense dans*** $\mathbb{R}$ *si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.*

Les ensembles $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Une caractérisation des parties denses :

**Propriété 10** *Une partie* $A$ *est dense dans* $\mathbb{R}$ *si et seulement si pour tout* $x$ *dans* $\mathbb{R}$ *il existe une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{R}}$ *à valeurs dans* $A$ *tel que* $x_n \to x$.

Autre application : on considère une partie $A$ non vide de $\mathbb{R}$ et $M \in \overline{\mathbb{R}}$ :

**Propriété 11** *On a* $M = \mathrm{Sup}(A)$ *si et seulement si :*
- $M$ *est un majorant de* $A$ *et :*
- *Il existe une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de point de* $A$ *tel que* $x_n \to M$.

# 11 Suites complexes.

Une **suite complexe** est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$. On note $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites complexes :

$$\mathbb{C}^{\mathbb{N}} = \left\{ u = (u_n) \quad : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{C} \\ n \mapsto u_n \in \mathbb{C} \end{cases} \right\}$$

A toute suite complexe $(u_n)$, on associe 2 suites réelles : ses **parties réelles et imaginaires** : $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\Im(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n = \mathrm{Re}(u_n) + i.\mathrm{Im}(u_n)$

**Définition 7** *On dit que la suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***converge*** *vers le nombre complexe $l$ qui est du coup sa* ***limite*** *quand les 2 conditions équivalentes suivantes sont réalisées :*

- $\begin{cases} \mathrm{Re}(u_n) \to \mathrm{Re}(l) \\ \mathrm{Im}(u_n) \to \mathrm{Im}(l) \end{cases}$
- $|u_n - l| \to 0$.

On montre, comme dans le cas réel :

**Théorème 10** *Si les suites complexes $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes et si $\lambda$ est un complexe alors les suites $(u_n + v_n)$, $(u_n.v_n)$, $(\lambda.u_n)$ le sont aussi.*
*On a de plus les règles opératoires (les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont supposée convergentes, dans le dernier cas, $l \neq 0$) :*

| suite | $u_n$ | $v_n$ | $\overline{u_n}$ | $u_n + v_n$ | $u_n.v_n$ | $\lambda u_n$ | $\frac{1}{u_n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| limite | $l$ | $l'$ | $\overline{l}$ | $l + l'$ | $l.l'$ | $\lambda l$ | $\frac{1}{l}$ |

Les notions de suite monotone, majorée ... n'ont pas de sens pour les suites complexes. Par contre, on dit qu'une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** quand la suite réelle $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est et on montre :

**Théorème 11 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)** *De toute suite complexe bornée, on peut extraire une suite convergente*

# 12 Quelques familles classiques de suites

## 12.1 Les suites arithmétiques et géométriques

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique** de **raison** $r$ quand on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

On a alors, si $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_n = u_0 + n.r$$
$$\sum_{k=1}^{n} u_k = n.\frac{u_n + u_1}{2}$$

Une suite arithmétique réelle de raison $r > 0$ tend vers $+\infty$.
Une suite arithmétique réelle de raison $r < 0$ tend vers $-\infty$.

Une suite $(u_n)$ est **géométrique** de **raison** $r \in \mathbb{C}$ quand on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_{n+1} = u_n.r$$

On a alors, si $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_n = u_0.r^n$$

Une suite géométrique de raison $r \in \mathbb{C}$ avec $|r| < 1$ tend vers 0.
Une suite géométrique réelle de raison $r > 1$ tend vers $\pm\infty$ en fonction du signe de $u_0$.

Si $u_n$ est géométrique, les sommes de ses termes se calculent en utilisant la formule de la série géométrique :
Si $r \neq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

## 12.2 Les suites arithmético-géométriques

On appelle suite **arithmético-géométrique** une suite vérifiant la relation de récurrence : pour $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+1} = a.u_n + b$ avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$ complexes.

On pose $\lambda = \frac{b}{1-a}$. On observe alors que $\lambda = a.\lambda + b$ et que $(u_{n+1} - \lambda) = a.(u_n - \lambda)$.
Autrement dit : la suite $(u_n - \lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $a$ ce qui permet son expression explicite.

## 12.3 Les suites linéaires récurrentes d'ordre 2

On appelle suite **linéaire homogène récurrente d'ordre 2** une suite vérifiant une relation de récurrence du type : pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$(R) : u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$$

avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$ complexes fixés. Notons qu'une telle suite est uniquement déterminée par les valeurs de $u_0$ et $u_1$.

On lui associe l'équation caractéristique :

$$(E_c) : r^2 = a.r + b$$

**Théorème 12** *Si l'équation $(E_c)$ a 2 racines distinctes $r_1$ et $r_2$ alors il existe $\lambda$ et $\mu$ 2 constantes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :*

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

*Si l'équation $(E_c)$ a 1 racine double $r$ alors il existe $\lambda$ et $\mu$ 2 constantes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :*

$$u_n = \lambda r^n + \mu n.r^n$$

Dans les 2 cas, on détermine si besoin $\lambda$ et $\mu$ à l'aide des "conditions initiales" c'est à dire des valeurs de $u_0$ et $u_1$.

Si la suite $(u_n)$ est réelle, on a en général intérêt à la voir comme une suite complexe puis retrouver une forme réelle à l'aide des formules d'Euler.

## 12.4 Les suites $u_{n+1} = f(u_n)$

L'étude des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où $f$ est une fonction réelle à variable réelle ; est un sujet classique qui occupera nombre d'exercices. Nous nous contentons ici de quelques remarques.

**Propriété 12** *Si $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ **stable** par $f$ c'est à dire : $f(I) \subset I$ et $u_0 \in I$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n \in I$.*

**Propriété 13** *Si $u_n \to l \in \mathbb{R}$ et $f$ est continue en $l$ alors $f(l) = l$.*

# Savoirs et savoirs faire indispensables

## Savoir

Définitions d'un majorant, d'un minorant, d'un plus grand élément, d'un plus petit élément, d'une borne supérieure, d'une borne inférieure.
Théorèmes de convergence monotone.

## Savoir faire

Étude des suites simples.