Fiche 33 : TD du 12-12

Exercice

Pour tout entier naturel n et tout $x \in [-1, 1]$, on pose :

$$P_n(x) = \cos(2n \arcsin(x))$$

1. Calculer pour $x \in [-1, 1]$: $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ (on les écrira sous forme d'expressions polynômiales).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1, 1]$:

$$P_{n+2}(x) + P_n(x) = 2(1 - 2x^2)P_{n+1}(x)$$

(On pourra calculer l'expression $\cos(a + b) + \cos(a - b)$).

3. En déduire que pour tout entier n , la fonction P_n est polynômiale, paire et préciser son degré, son coefficient dominant et son terme constant.
4. Montrer que P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ en déterminant ses racines. (On pourra les chercher sous la forme $\sin(\theta)$).
5. Déduire des calculs précédents :

$$\Pi_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right)$$

6. Pour tout entier n , en revenant à la définition de P_n , montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$(x^2 - 1)P_n''(x) + xP_n'(x) = 4n^2P_n(x)$$

Problème

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant, on dit que P est stable quand :

Pour tout λ racine réelle ou complexe de P , $\Re(\lambda) < 0$, $\Re$ désignant la partie réelle.

Partie 1 : Le cas du degré 2

Soient a et b deux réels. On note $P(X) = X^2 + aX + b$ et $\Delta = a^2 - 4b$.

On note z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que : $P(X) = (X - z_1)(X - z_2)$.

Montrer que P est stable si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$.

Partie 2 : Le cas du degré 3

Soit $Q = X^3 + X^2 + X + 1$

1. Déterminer les racines complexes de Q .
2. Montrer que Q n'est pas stable.

Soient a, b et c trois réels. On considère le polynôme réel P unitaire de degré 3 écrit sous la forme :

$$P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c.$$

On dit que P vérifie la propriété $\mathcal{H}$ quand :

$$a > 0 \quad b > 0, \quad c > 0 \quad \text{et} \quad ab - c > 0.$$

Par le théorème de D'Alembert-Gauss, on note z_1, z_2 et z_3 trois nombres complexes tels que :

$$P(X) = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$$

L'objectif de cette partie est de montrer que P est stable c'est à dire $\Re(z_1) < 0$, $\Re(z_2) < 0$ et $\Re(z_3) < 0$ si et seulement si P vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

1. Montrer que : $a = -(z_1 + z_2 + z_3)$, $b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$, $c = -z_1z_2z_3$ et $ab - c = -z_1^2z_2 - z_1^2z_3 - z_2^2z_1 - z_2^2z_3 - z_3^2z_1 - z_3^2z_2 - 2z_1z_2z_3$.

2. Montrer que l'une des racines de P est un nombre réel.
3. On suppose dans cette question que z_1, z_2 et z_3 sont des réels.
- (a) Montrer que si P est stable, alors P vérifie la propriété $\mathcal{H}$.
- (b) Montrer réciproquement que si P vérifie la propriété $\mathcal{H}$ alors z_1, z_2 et z_3 sont strictement négatifs (on pourra le signe de P sur $\mathbb{R}^+$).
4. On suppose dans cette question que z_1 est réel et z_2 et z_3 sont complexes et non réels.
- (a) Montrer que z_2 et z_3 sont conjugués.
On écrit alors $z_2 = \alpha + i\beta$ et $z_3 = \alpha - i\beta$ avec α réel et β réel strictement positif.
- (b) Vérifier que :
 $a = -(z_1 + 2\alpha), \quad b = 2z_1\alpha + \alpha^2 + \beta^2, \quad c = -z_1(\alpha^2 + \beta^2)$
 et $ab - c = -2\alpha(z_1^2 + \alpha^2 + \beta^2) - 4z_1\alpha^2$.
- (c) Montrer que si P est stable, alors P vérifie la propriété $\mathcal{H}$.
Pour étudier la réciproque, on suppose maintenant que P vérifie la propriété $\mathcal{H}$ et on souhaite montrer que P est stable.
- (d) Montrer qu'on a : $z_1 < 0$.
- (e) On pose :

$$\begin{cases} Z_1 = z_2 + z_3 \\ Z_2 = z_1 + z_3 \\ Z_3 = z_1 + z_2 \end{cases}$$

Montrer que :

$$\begin{cases} Z_1 + Z_2 + Z_3 = -2a \\ Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_1Z_3 = a^2 + b \\ Z_1Z_2Z_3 = c - ab \end{cases}$$

- (f) Montrer alors que $Q(X) = (X - Z_1)(X - Z_2)(X - Z_3)$ est un polynôme réel à coefficients tous strictement positifs dont 2α est racine.
- (g) Conclure que P est stable.