Fiche 35 : Suites.

Exercice 1

1. Montrer qu'une suite d'entier convergente est stationnaire à partir d'un certain rang.
2. Montrer (on pourra utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass) que si $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ est une suite de réels tel que $|u_n| \not\to +\infty$ alors on peut extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente.
3. Montrer que si on a des suites d'entiers $(p_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, $(q_n) \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ tel que :
$$\frac{p_n}{q_n} \to x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$
alors $q_n \to +\infty$.

Exercice 2

On rappelle la limite classique pour $x \to 0$: $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$.

On se donne $a \in]0, \pi[$ et on considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^n}\right)$$

1. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. En utilisant la formule d'arc double de sin simplifier u_n et déterminer sa limite.

Exercice 3

On fixe z_0 dans $\mathbb{C}$ qu'on écrit sous forme trigonométrique : $z_0 = \rho e^{i\theta}$.

Étudier la suite complexe donnée par : pour $n \in \mathbb{N}$:

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

On pourra utiliser l'exercice précédent.

Exercice 4

1. Si $n \geq 1$, montrer que l'équation (E_n) :
$$\sum_{k=1}^{n} x^k = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = 1$$
admet une unique solution, notée a_n, dans $[0, 1]$.
2. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par $\frac{1}{2}$.
3. Montrer que (a_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 5

1. Si $n \geq 1$, montrer que l'équation (F_n) :
$$x + x^n = 1$$
admet une unique solution dans $[0, 1]$, qu'on note b_n.
2. Étudier la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.