

Fiche 36 : TD du 19-12.

Exercice 1

Montrer, en revenant aux définitions des limites d'une suite les résultats suivants :

1. La limite d'une somme de suites convergentes est une suite convergeant vers la somme des limites.
2. La limite d'une somme d'une suite convergente et d'une suite tendant vers $+\infty$ est une suite tendant vers $+\infty$.
3. La limite du produit d'une suite convergente vers $l > 0$ et d'une suite tendant vers $+\infty$ est une suite tendant vers $+\infty$.

Exercice 2

Déterminer si elles existent les limites des suites :

1. $a_n = \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{5}\right)^k$
2. $b_n = \frac{\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k}{\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k}$
3. $c_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$
4. $d_n = n \sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)$
5. $\frac{n^{\ln(n)}}{\ln^n(n)}$
6. $\sqrt[n]{n^2}$.

Exercice 3

Montrer que les suites définies pour $n > 0$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \quad ; \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

sont adjacentes. On ne demande pas la valeur de la limite commune.

Exercice 4

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associées à la relation de récurrence $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 8}{6}$$

avec une donnée initiale $u_0 \geq 0$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 0$.
2. Étudier sur $\mathbb{R}_+$ la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 + 8}{6}$ et le signe de l'expression $f(x) - x$.
3. Étudier en fonction de u_0 , le comportement de la suite (u_n) .

Exercice 5

1. Montrer qu'il existe 2 réels $\alpha < 0 < \beta$ qu'on ne cherchera pas à calculer vérifiant :

$$\begin{cases} \exp(\alpha) = \alpha + 2 \\ \exp(\beta) = \beta + 2 \end{cases}$$

2. Discuter suivant les valeurs de u_0 la nature de la suite définie par la donnée de u_0 réel et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = e^{u_n} - 2$$