# Fiche 37 : Suites récurrentes.

**Exercice 1**

Déterminer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
2. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n$.

**Exercice 2**

On considère la suite définie par $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

**Exercice 3**

On considère les suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n! \cdot n}$$

1. Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.
2. Leur limite commune est (par définition en fait) le nombre $e$. Montrer que $e$ est un nombre irrationnel.

**Exercice 4 : Constante d'Euler**

Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$ : $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$ : $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.
2. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$ : $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
3. Déterminer la limite de $(H_n)$.
4. Montrer que $(u_n = H_n - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante et positive.
5. Conclusion ?

**Exercice 5**

On pose si $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

1. Étudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

   $$\ln(2n+1) - \ln(n+1) < v_n < \ln(2n) - \ln(n)$$

   On pourra utiliser l'exercice précédent.
3. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.