Fiche 39 : Groupes.

Exercice 1

1. Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*, \mathbb{C}, \mathbb{C}^*$ munis des lois $+$ ou $\times$ sont-ils des groupes ? Quand c'est le cas, chercher des sous-groupes non triviaux.
2. $\{x \in \mathbb{R} \mapsto ax+b : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ muni de la loi de la somme des applications est-il un groupe ?
3. $\left\{x \in \mathbb{R} \mapsto ax+b : a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}\right\}$ muni de la loi de composition des applications est-il un groupe ?

Exercice 2

Soient les quatre fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$

$$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = \frac{1}{x} \qquad f_3(x) = -x \qquad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$

Montrer que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est un groupe pour la loi $\circ$.

Exercice 3

Les ensembles suivants, pour les lois considérées, sont-ils des groupes ?

1. $]-1,1[$ muni de la loi définie par $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$;
2. $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ pour la multiplication usuelle ;
3. $\mathbb{R}_+$ pour la multiplication usuelle ;
4. $S_\lambda = \{\exp(i\lambda t) : t \in \mathbb{R}\}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ fixé avec la multiplication usuelle.
5. $\{x \in \mathbb{R} \mapsto ax+b : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}\}$ pour la loi de composition des applications.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ l'application qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe $e^{ix} \in \mathbb{C}^*$. Montrer que f est un homomorphisme de groupes. Calculer son noyau et son image. f est-elle injective ?