PROBLÈME I

Mécanique du vol d'un avion

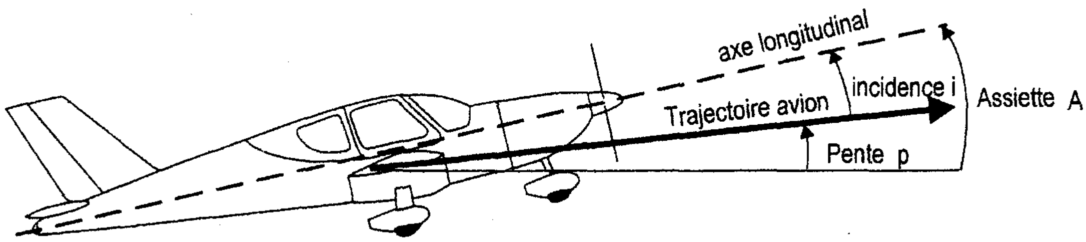
Dans ce problème on étudie différentes phases du vol d'un avion monomoteur à hélice, en l'absence de vent, dans le référentiel terrestre ($\mathcal{R}$) supposé galiléen auquel on associe un système d'axes cartésien dont (Oz) constitue la verticale ascendante. L'intensité du champ de pesanteur supposé uniforme est $g = 9{,}8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

Pour caractériser le mouvement et l'attitude de l'avion dans l'espace, on définit trois angles :

— la pente p : angle entre l'horizontale et la trajectoire de l'avion ;

— l'assiette A : angle entre l'horizontale et l'axe longitudinal de l'avion ;

— l'incidence i : angle entre la trajectoire de l'avion et son axe longitudinal.



Pour simplifier l'étude, on ne s'intéresse qu'au mouvement du centre d'inertie G de l'avion, de masse $m = 800\,\mathrm{kg}$, soumis aux forces suivantes :

— son poids $\vec{P}$;

— la force de traction $\vec{F}_m$ de l'hélice, entraînée par le moteur, dont la direction est celle de l'axe longitudinal de l'avion. La puissance développée par le moteur pour fournir cette force est donnée par l'expression $\mathcal{P}_m = \vec{F}_m \cdot \vec{v}$ avec $\vec{v}$ le vecteur vitesse de l'avion ;

— la résultante des forces aérodynamiques, contenue dans le plan de symétrie de l'avion, décomposée en portance $\vec{F}_p$ et trainée $\vec{F}_t$:

- la portance, perpendiculaire à la trajectoire de l'avion, de norme $F_p = \frac{1}{2}\rho S v^2 C_p$;
- la traînée, de même direction que la trajectoire mais s'opposant au mouvement de l'avion, de norme $F_t = \frac{1}{2}\rho S v^2 C_t$;

où $\rho = 1{,}2\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ est la masse volumique de l'air supposée constante et égale à celle mesurée au niveau de la mer, $S = 10\,\mathrm{m}^2$ est l'aire de la surface des ailes de l'avion projetée sur le plan horizontal et v est la vitesse de l'avion par rapport à l'air.

Les coefficients sans dimension C_p et C_t ne dépendent que de l'incidence i. À incidence nulle (ce qui sera le cas dans tout le problème), $C_p = 0{,}452$ et $C_t = 0{,}049$.

Partie A. Vol en montée

Après avoir quitté le sol, l'avion est animé d'un mouvement rectiligne uniforme en montée avec une assiette A à incidence nulle.

I.1) Faire un schéma de la configuration de vol en y représentant les forces.

I.2) Quelle relation vectorielle existe entre ces forces ? Projeter cette relation sur l'axe longitudinal de l'avion et sur l'axe qui lui est perpendiculaire.

I.3) En déduire la vitesse v et la force de traction F_m en fonction de l'assiette A.

I.4) Montrer que la puissance du moteur a l'expression suivante en fonction de l'assiette A :

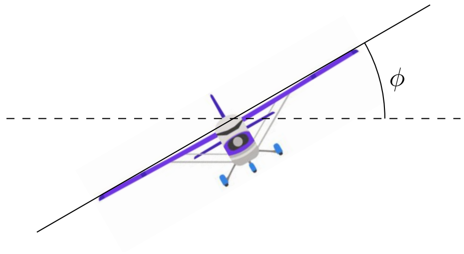
$$\mathcal{P}_m = mg\left(\sin(A) + \frac{C_t}{C_p}\cos(A)\right)\sqrt{\frac{2mg\cos(A)}{\rho S C_p}}$$

I.5) Le pilote impose une puissance du moteur égale à sa valeur maximale $\mathcal{P}_{\max} = 80\,\mathrm{kW}$. Déterminer l'assiette A de l'avion, que l'on supposera faible.

I.6) En déduire la vitesse v de l'avion et sa vitesse ascensionnelle v_z.

Partie B. Vol en virage

L'avion effectue maintenant un virage circulaire de rayon R en palier ($p = 0°$), avec une incidence nulle et à vitesse v constante. Pour réaliser ce virage, le pilote incline l'avion d'un angle ϕ (le plan moyen des ailes est incliné de ϕ par rapport au plan horizontal). En voici la représentation vue de face.



I.7) Reproduire sommairement le schéma et représenter les forces exercées. Dans quelle direction tourne l'avion ? Justifier.

I.8) Exprimer l'accélération de l'avion dans une base appropriée.

I.9) Déterminer le rayon R du virage en fonction de la vitesse v de l'avion, de l'angle d'inclinaison ϕ et de g.

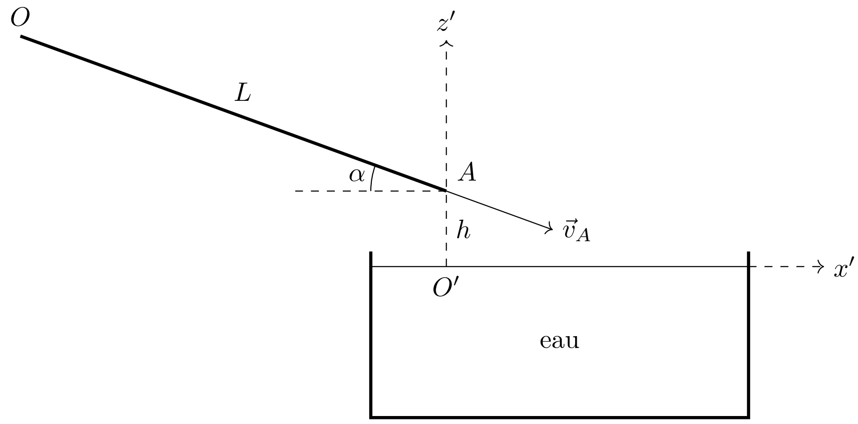
I.10) La conception structurale de l'avion impose une borne supérieure au facteur de charge $\eta = \dfrac{F_p}{P}$ de l'ordre de $\eta_{\max} = 2$. Déterminer l'expression du rayon minimal du virage que le pilote peut faire prendre à l'avion en toute sécurité.

PROBLÈME II

Étude d'un toboggan aquatique

Une personne de masse m considérée comme un point matériel M, se laisse glisser sans vitesse initiale sur un toboggan rectiligne de longueur L faisant un angle constant α avec l'horizontale. Au bout du toboggan, elle tombe en chute libre dans un bassin situé à une hauteur h en-dessous. On note O le point de départ du toboggan et A le point d'arrivée, et O' le point à la verticale de A situé à la surface du bassin.

Dans tout le problème, on travaillera dans le référentiel de la piscine supposé galiléen.



Données : $L = 20{,}0\,\mathrm{m}$; $\alpha = 20°$; $g = 9{,}8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$; $m = 50{,}0\,\mathrm{kg}$; $h = 0{,}40\,\mathrm{m}$.

Partie A. Étude du mouvement sur le toboggan

On suppose que la glissade de la personne sur le toboggan se fait sans frottement. Soit x la distance parcourue depuis le point O.

II.1) Déterminer l'accélération de la personne en fonction de g et α.

II.2) En déduire la loi horaire du mouvement $x(t)$.

II.3) Montrer que la vitesse v_A atteinte au point A a pour expression : $v_A = \sqrt{2gL\sin(\alpha)}$. Application numérique.

On mesure une vitesse $v_A = 8{,}0\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Pour interpréter l'écart avec la valeur obtenue précédemment, on suppose qu'une force constante et opposée au mouvement est exercée sur la personne lors de sa glissade.

II.4) Déterminer l'intensité de cette force.

Partie B. Mouvement de chute libre dans l'air

Après son passage en A, la personne a un mouvement de chute libre dans l'air.

II.5) Établir l'équation cartésienne de sa trajectoire dans l'air dans le repère $(\mathrm{O}'x'z')$, en utilisant les grandeurs g, v_A, α et h.
En donner une représentation schématique en y faisant figurer le vecteur $\vec{v}_A$.

II.6) Déterminer les coordonnées du point B dans le repère $(O'x'z')$ correspondant au point de chute de la personne dans l'eau. En déduire la durée de la phase de chute libre.

II.7) Déterminer les valeurs numériques des composantes $v_{Bx'}$ et $v_{Bz'}$ de la vitesse en B.

Partie C. Mouvement dans l'eau

Après être entrée dans l'eau, la personne est soumise de la part de l'eau à la poussée d'Archimède ainsi qu'à une force de frottement visqueux $\vec{F} = -k\vec{v}$ avec $k = 250\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.
Donnée : densité moyenne du corps humain (rapport de sa masse volumique sur celle de l'eau) $d_h = 0{,}9$.

II.8) Faire le bilan des forces exercées sur le nageur et donner l'expression de chacune d'elles.

II.9) Montrer que l'équation différentielle vectorielle satisfaite par la vitesse $\vec{v}$ se met sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = \left(1 - \frac{1}{d_h}\right)\vec{g}$$

Exprimer τ et calculer sa valeur. Que représente-t-il ?

II.10) Justifier l'existence d'une vitesse limite $\vec{v}_{\mathrm{lim}}$. Indiquer sa direction et son sens.

II.11) Représenter l'allure de la trajectoire sous l'eau.

II.12) Établir l'expression de $x'(t)$ en fonction de la coordonnée x'_B, de la composante horizontale $v_{Bx'}$ de la vitesse en B, de τ et de t.

Montrer que $x'(t)$ reste inférieur à une valeur limite notée x'_{lim} à déterminer. Commenter la valeur numérique obtenue concernant la construction du bassin de réception des nageurs.

PROBLÈME III

Cinétique de décomposition du pentaoxyde d'azote

La décomposition du pentaoxyde d'azote. est une transformation d'ordre 1 et suit l'équation de réaction : $N_2O_5(g) = 2\,NO_2(g) + \frac{1}{2}\,O_2(g)$.

Cette réaction est réalisée vers 160 °C en phase gazeuse où on considère qu'elle est la seule à se produire. On admet de plus que tous les gaz se comportent comme des gaz parfaits et on note k la constante de vitesse. La réaction est étudiée dans un récipient de volume constant V .

À l'instant initial $t = 0$, on introduit N_2O_5 pur dans l'enceinte, à la « concentration » $[N_2O_5]_0 = \dfrac{n(N_2O_5)_0}{V}$. On note P_0 la pression initiale dans l'enceinte.

Donnée : constante des gaz parfaits $R = 8{,}31\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$.

III.1) Établir l'équation différentielle vérifiée par la « concentration » $[N_2O_5] = \dfrac{n(N_2O_5)}{V}$.

III.2) Exprimer alors la « concentration » $[N_2O_5]$ en fonction de t, k et $[N_2O_5]_0$.

III.3) En déduire la pression partielle $P(N_2O_5)$ en fonction de t, k et P_0.

III.4) Pratiquement, il est extrêmement difficile de mesurer directement des pressions partielles, alors que la mesure de la pression totale est très facile. Montrer que la pression totale P en fonction de t, k et P_0 suit la loi : $P = \dfrac{P_0}{2}(5 - 3\exp(-kt))$.

III.5) Des mesures manométriques au cours du temps de la pression totale, ont fourni le tableau de résultats suivants :

t (s)	0	600	1200	2400	3600	4800
P ($\times 10^5$ Pa)	0,46	0,64	0,77	0,94	1,05	1,09

Quelle expression doit-on tracer en fonction du temps afin d'obtenir une droite ? Valider l'ordre de réaction par régression linéaire.

III.6) En déduire la valeur de la constante de vitesse k.

III.7) Pour cette réaction, l'énergie d'activation est de $103\ \mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$. À quelle température faudra-t-il réaliser la réaction si on veut que 95 % du réactif soit transformé au bout de 30 minutes ?