Fiche 42 : Espaces vectoriels.

Exercice 1

Pour $k = 2, 3, 4$ montrer que V_k est un s.e.v. de $\mathbb{C}^k$, et en donner une base :

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 / a + ib = 0 \right\}, V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 / a + 2b + 3c = 0 \right\},$$

$$V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 / a + ib = b + ic = c + id \right\}.$$

Exercice 2

On se place dans $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
On note : $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions de E qui sont impaires sur $\mathbb{R}$; $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions de E qui sont paires sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{P}$ sont des sous espaces vectoriels de E.
2. Montrer que $E = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$.
3. Décomposer les fonctions exp et $x \to \frac{1}{x^2+x+1}$ suivant cette somme directe.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré $\leq n$.

1. Soit $\beta = (P_0, P_1, ..., P_n)$ un système de $(n+1)$ polynômes tels que, $\forall k$, $0 \leq k \leq n$, $\deg P_k = k$. Montrer que β est une base de E.
2. Soit P un polynôme de degré n. Montrer que : $\gamma = (P, P', \ldots, P^{(n)})$ est une base de E et déterminer les composantes du polynôme Q défini par : $Q(X) = P(X+a)$, (a réel fixé), dans la base γ.
3. Démontrer que le système $S = (X^k(1-X)^{n-k})_{0\leq k\leq n}$ est une base de E, et déterminer, pour tout $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$, les composantes du polynôme X^p dans la base S.
4. Soit $a_0 < a_1 < ... < a_n$ des réels et $L_0, ..., L_n$ les polynômes interpolateurs de Lagrange associés (on rappelle que $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$). Sans utiliser le théorème de Lagrange, montrer que $(L_0, ..., L_n)$ est une famille libre puis une base de E.