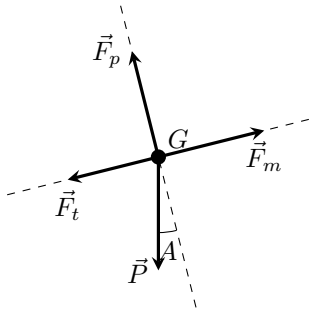
PROBLÈME I.

Mécanique du vol d'un avion

Partie A. Vol en montée

I.1) Schéma des forces.



I.2) Le mouvement de l'avion est rectiligne et uniforme donc l'accélération de son centre d'inertie est nulle.

D'après le principe fondamental de la dynamique, la résultante des forces s'annule : $\boxed{\vec{P} + \vec{F}_m + \vec{F}_p + \vec{F}_t = \vec{0}}$.

En projetant le PFD :

— sur l'axe longitudinal de l'avion, on obtient : $F_m = F_t + P\sin(A)$ soit $\boxed{F_m = \frac{1}{2}\rho S v^2 C_t + mg\sin(A)}$ (relation 1) ;

— sur l'axe perpendiculaire à la direction du mouvement, on obtient $F_p = P\cos(A)$ soit $\boxed{\frac{1}{2}\rho S v^2 C_p = mg\cos(A)}$ (relation 2).

I.3) De la relation 2 on tire $\boxed{v = \sqrt{\frac{2mg\cos(A)}{\rho S C_p}}}$.

La relation 2 donne $\frac{1}{2}\rho S v^2 = mg\cos(A)/C_p$. En injectant dans la relation 1 on obtient $\boxed{F_m = mg\left(\sin(A) + \frac{C_t}{C_p}\cos(A)\right)}$.

I.4) La puissance du moteur est $\boxed{\mathcal{P}_m = F_m v}$ pour une incidence nulle.

Il vient alors $\mathcal{P}_m = mg\left(\sin(A) + \frac{C_t}{C_p}\cos(A)\right)\sqrt{\frac{2mg\cos(A)}{\rho S C_p}}$ qui est l'expression fournie.

I.5) En supposant l'assiette A faible, on peut faire les approximations suivantes : $\cos(A) \approx 1$ et $\sin(A) \approx A$. Donc $\mathcal{P}_m \approx mg(A + C_t/C_p)\sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_p}}$.

On en déduit l'assiette $\boxed{A = \frac{\mathcal{P}_m}{mg}\sqrt{\frac{\rho S C_p}{2mg}} - \frac{C_t}{C_p}}$.

Pour la puissance maximale, l'application numérique donne $\boxed{A = 8{,}1 \times 10^{-2}\,\text{rad} = 4{,}6°}$.

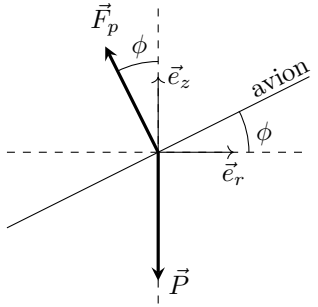
Le résultat est effectivement faible, ce qui valide les approximations effectuées.

I.6) À cette assiette, la vitesse vaut $\boxed{v = 54\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$ et la vitesse ascensionnelle $\boxed{v_z = v\sin(A) = 4{,}4\,\text{m/s}}$.

Partie B. Vol en virage

I.7) Les forces $\vec{F}_m$ et $\vec{F}_t$ sont suivant $\vec{e}_\theta$ qui est perpendiculaire au plan de la feuille. Elles se compensent car le mouvement est uniforme.

La résultante des forces étant dirigée vers la gauche, l'avion tourne dans cette direction, qui correspond à un virage à droite vu de l'habitacle.



I.8) On utilise le système de coordonnés cylindriques, l'axe (Oz) représentant l'axe vertical autour duquel effectue son virage. Le mouvement étant circulaire et uniforme, son vecteur accélération est centripète : $\boxed{\vec{a}_G = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r}$.

I.9) Le PFD appliqué à l'avion s'écrit : $\boxed{\vec{P}+\vec{F}_m+\vec{F}_p+\vec{F}_t=m\vec{a}_G}$.

En projetant le PFD sur $\vec{e}_z$ on obtient $P=F_p\cos(\phi)$ et sur $\vec{e}_r$ on obtient $-F_p\sin(\phi)=-mv^2/R$.

Le rayon du virage vaut $R=\dfrac{mv^2}{F_p\sin(\phi)}$. Or $F_p=\dfrac{mg}{\cos(\phi)}$ donc $\boxed{R=\dfrac{v^2}{g\tan(\phi)}}$.

I.10) $\eta=\dfrac{F_p}{P}=\dfrac{1}{\cos(\phi)}$.

Alors $\tan(\phi)=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2(\phi)}-1}=\sqrt{\eta^2-1}\leqslant\sqrt{\eta_{\max}^2-1}$.

Pour conclure $\boxed{R\geqslant\dfrac{v^2}{g\sqrt{\eta_{\max}^2-1}}=\dfrac{v^2}{\sqrt{3}g}}$.

PROBLÈME II.

Étude d'un toboggan aquatique

Partie A. Étude de la trajectoire sur le toboggan

II.1) On se place dans la base $(\vec{e}_x,\vec{e}_y)$ du plan du mouvement, avec $\vec{e}_x$ le long de la pente et $\vec{e}_y$ perpendiculaire à la pente vers le haut.

Dans cette base, les forces exercées sur la personne ont pour expression :

— poids $\vec{P}=mg(\sin\alpha\,\vec{e}_x-\cos\alpha\,\vec{e}_y)$;

— réaction normale du toboggan : $\vec{R}=R_N\vec{e}_y$.

Le mouvement est rectiligne le long de la pente, donc $\vec{a}_G=\ddot{x}\,\vec{e}_x$.

D'après le principe fondamental de la dynamique (PFD), $\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}_G$. En projetant sur $\vec{e}_x$, on obtient : $mg\sin\alpha=ma_x$ d'où une accélération $\boxed{a_x=g\sin\alpha}$.

II.2) $a_x=\ddot{x}$. En intégrant deux fois, avec des conditions initiales nulles il vient : $\dot{x}(t)=a_xt$ et $\boxed{x(t)=\dfrac{1}{2}a_xt^2}$.

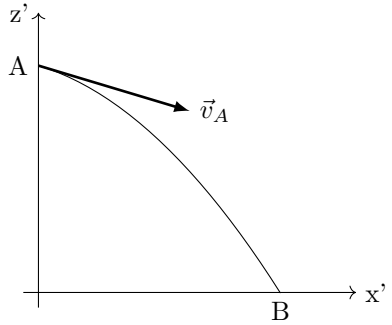
II.3) Le point A correspond à $x=L$. On en déduit la date d'arrivée en ce point : $t_A=\sqrt{\dfrac{2L}{a_x}}$. On reporte dans l'expression de la vitesse : $\boxed{v_A=\dot{x}(t_A)=\sqrt{2La_x}=\sqrt{2gL\sin(\alpha)}}$.

II.4) En ajoutant une force de frottement $\vec{F}=-F\vec{e}_x$, le PFD projeté sur $\vec{e}_x$ s'écrit : $mg\sin\alpha-F=ma_x$.

F étant constante, l'accélération l'est également donc l'expression $v_A=\sqrt{2La_x}$ reste valide.

On a donc $\boxed{F=m(g\sin(\alpha)-a_x)=m\left(g\sin(\alpha)-\dfrac{v_A^2}{2L}\right)=88\,\text{N}}$.

Partie B. Mouvement de chute libre dans l'air



II.5) On pose $t'=t-t_1$ la date pendant cette phase. La vitesse initiale (à $t'=0$) est $\vec{v}_A=v_\text{B}\cos(\alpha')\,\vec{e}_{x'}-v_\text{B}\sin(\alpha')\,\vec{e}_{z'}$ et la position initiale est $\overrightarrow{O'B}=h_1\,\vec{e}_{z'}$.

En chute libre, la seule force exercée est le poids $\vec{P}=-mg\,\vec{e}_{z'}$ (on néglige la poussée d'Archimède pour un corps condensé dans l'air).

D'après le PFD appliqué au point M dans le référentiel de la piscine supposé galiléen, $\vec{P}=m\vec{a}$ d'où $\vec{a}=-g\,\vec{e}_{z'}$. On a donc $a_{x'}=0$ et $a_{z'}=-g$.

On intègre : $v_{x'}(t')=v_A\cos(\alpha)$ et $v_{z'}(t')=-gt'-v_A\sin(\alpha)$.

On intègre à nouveau : $x'(t')=v_B\cos(\alpha).t'$ et $z'(t')=-\dfrac{1}{2}g.t'^2-v_A\sin(\alpha).t'+h$.

On extrait t' de la première équation : $t'=\dfrac{x'}{v_A\cos(\alpha)}$ que l'on injecte dans la deuxième :

$$\boxed{z'(x')=-\frac{g}{2(v_A\cos(\alpha))^2}x'^2-\tan(\alpha).x'+h}$$

La nature géométrique de la trajectoire est une parabole (ci-dessus). Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.

II.6) Le point de chute est caractérisé par une altitude nulle : $z'_B = 0$. L'abscisse est la racine positive du polynôme décrivant la trajectoire : $\boxed{x'_B = \frac{(v_A\cos(\alpha))^2}{g}\left(-\tan(\alpha)+\sqrt{\tan(\alpha)^2+\frac{2gh}{(v_A\cos(\alpha))^2}}\right) = 0{,}90\,\text{m}}$.

La durée de la phase de chute libre est $\boxed{t'_B = \frac{x'_B}{v_A\cos(\alpha)} = 0{,}12\,\text{s}}$.

II.7) La vitesse en B vaut $\vec{v}_B = \vec{v}(t'_B) = v_A\cos(\alpha)\,\vec{e}_{x'} - (gt'_B + v_A\sin(\alpha))\,\vec{e}_{z'}$.

Ses composantes sont $\boxed{v_{Bx'} = v_A\cos(\alpha) = 7{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$ et $\boxed{v'_{Bz'} = -[gt'_B + v_A\sin(\alpha)] = -3{,}9\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

Partie C. Mouvement dans l'eau

II.8) Le volume du nageur est $V = \frac{m}{\rho} = \frac{m}{d_h\rho_{\text{eau}}}$.

Les forces exercées sur le nageur sont le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\rho_{\text{eau}}V\vec{g} = -\frac{m}{d_h}\vec{g}$ et la force de frottement visqueux $\vec{F} = -k\vec{v}$.

II.9) D'après le PFD, $m\vec{g} - \frac{m}{d_h}\vec{g} - k\vec{v} = m\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$.

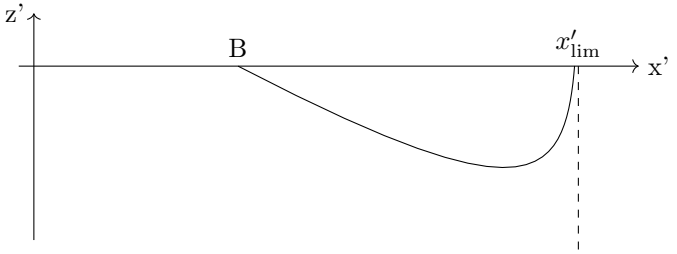
Le vecteur vitesse vérifie donc l'équation différentielle $\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\vec{v} = \left(1-\frac{1}{d_h}\right)\vec{g}}$.

On identifie la constante de temps $\boxed{\tau = \frac{m}{k} = 0{,}20\,\text{s}}$ qui caractérise la durée du régime transitoire.

II.10) La solution particulière constante correspond au régime permanent où l'accélération est nulle : c'est la vitesse limite $\boxed{\vec{v}_{\text{lim}} = \tau\left(1-\frac{1}{d_h}\right)\vec{g}}$.

Puisque $d_h < 1$, la parenthèse est négative donc $\vec{v}_{\text{lim}}$ est dirigé verticalement vers le haut.

II.11) On en déduit que la trajectoire s'incurve vers le haut :



II.12) En projetant l'équation différentielle précédente sur l'axe horizontal, on obtient l'équation vérifiée par la composante horizontale $v_{x'}$: $\dot{v}_{x'} + \frac{1}{\tau}v_{x'} = 0$. On résout avec la condition initiale $v_{x'}(0) = v_{Bx'}$: $v_{x'}(t) = v_{Bx'}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

$v_{x'} = \dot{x'}$ donc on intègre pour obtenir x'. Avec la condition initiale $x'(0) = x'_B$ il vient : $\boxed{x'(t) = x'_B + v_{Bx'}\tau\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$.

x' croît et tend vers une limite lorsque $t\to\infty$, à laquelle il restera toujours inférieur : $\boxed{x'_{\text{lim}} = x'_B + v_{Bx'}\tau = 2{,}4\,\text{m}}$.

La bassin recueillant les nageurs doit donc être un peu plus grand que cette valeur, ce qui est raisonnable.

PROBLÈME III.

Cinétique de décomposition du pentaoxyde d'azote

III.1) La vitesse de la réaction est liée à la vitesse de disparition du pentaoyxde d'azote : $v = v_d(\text{N}_2\text{O}_5) = -\frac{\mathrm{d}[\text{N}_2\text{O}_5]}{\mathrm{d}t}$.

La loi de vitesse est supposée d'ordre 1 soit $v = k[\text{N}_2\text{O}_5]$. On en déduit : $\boxed{\frac{\mathrm{d}[\text{N}_2\text{O}_5]}{\mathrm{d}t} + k[\text{N}_2\text{O}_5] = 0}$.

III.2) On résout avec comme condition initiale $[\text{N}_2\text{O}_5](0) = [\text{N}_2\text{O}_5]_0$. Il vient : $\boxed{[\text{N}_2\text{O}_5](t) = [\text{N}_2\text{O}_5]_0 e^{-kt}}$.

III.3) D'après la loi des gaz parfaits $P_{N_2O_5} = \dfrac{n(N_2O_5)RT}{V} = [N_2O_5]RT = [N_2O_5]_0 RTe^{-kt}$.

Or la pression initiale est $P_0 = [N_2O_5]_0 RT$. On a donc : $\boxed{P_{N_2O_5} = P_0 e^{-kt}}$.

III.4) Pour un avancement volumique x, on a $[N_2O_5] = [N_2O_5]_0 - x$, $[NO_2] = 2x$ et $[O_2] = x/2$ soit une concentration totale $c_{tot} = [N_2O_5]_0 + 3x/2 = \frac{1}{2}(5[N_2O_5]_0 - 3[N_2O_5])$.

Le mélange de gaz parfaits étant un gaz parfait, on a une pression totale $P = c_{tot}RT = \frac{1}{2}(5[N_2O_5]_0 RT - 3[N_2O_5]RT) = \frac{1}{2}(5P_0 - 3P_{N_2O_5}RT)$.

On en déduit l'expression proposée : $\boxed{P = \dfrac{P_0}{2}\left(5 - 3e^{-kt}\right)}$.

III.5) Il vient : $\ln\left(\dfrac{5}{3} - \dfrac{2P}{3P_0}\right) = -kt$.

Il faut donc tracer $\boxed{\ln\left(\dfrac{5}{3} - \dfrac{2P}{3P_0}\right) = f(t)}$ pour obtenir une droite si l'ordre est égal à 1.

Les valeurs à représenter sont :

t (s)	0	600	1200	2400	3600	4800
$\ln\left(\dfrac{5}{3} - \dfrac{2P}{3P_0}\right)$	0	−0,302	−0,597	−1,19	−1,93	−2,44

Par régression linéaire, on modélise par la droite d'équation $f(t) = at + b$ avec $a = -5{,}18 \times 10^{-4}\,s^{-1}$ et $b = 1{,}08 \times 10^{-2}$ avec un coefficient de détermination $R^2 = 0{,}998$ très proche de 1 ce qui valide le modèle.

III.6) On en déduit $\boxed{k = 5{,}18 \times 10^{-4}\,s^{-1}}$.

III.7) Si on veut que 95 % du réactif soit transformé au bout d'un temps $t = 30\,min$, il faut que $[N_2O_5](t) = 0{,}05 \times [N_2O_5]_0$ soit $e^{-kt} = 0{,}05$ donc $k = -\dfrac{1}{t}\ln(0{,}05) = 1{,}66 \times 10^{-3}\,s^{-1}$.

D'après la loi d'Arrhénius, $k(T) = A\exp\left(-\dfrac{E_a}{RT}\right)$. On en déduit $\ln\left(\dfrac{k(T_1)}{k(T_2)}\right) = -\dfrac{E_a}{R}\left(\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}\right)$.

On en déduit $\boxed{T_2 = \dfrac{T_1}{1 + \dfrac{RT_1}{E_a}\ln\left(\dfrac{k(T_1)}{k(T_2)}\right)}}$.

Avec $T_1 = 160\,°C = 433\,K$ et $k(T_1) = 5{,}18 \times 10^{-4}\,s^{-1}$, on obtient $k(T_2) = 1{,}66 \times 10^{-3}\,s^{-1}$ pour $\boxed{T_2 = 451\,K = 178\,°C}$.